Chương 2

BÌNH SAI ĐIỀU KIỆN

Như đã trình bày trong chương 1, theo nguyên lý bình phương nhỏ nhất người ta đưa ra hai phương pháp bình sai chủ yếu là phương pháp bình sai điều kiện và bình sai gián tiếp. Trong thời gian trước năm 1980, phương pháp bình sai điều kiện (*conditional adjustment*) đã được sử dụng khá phổ biến để bình sai các mạng lưới trắc địa, nhưng từ khi kỹ thuật máy tính điện tử phát triển, phương pháp bình sai gián tiếp lại được ứng dụng chủ yếu để giải quyết nhiệm vụ bình sai lưới. Tuy vậy, phương pháp bình sai điều kiện vẫn cần được giới thiệu trong nội dung môn học này để mỗi kỹ sư trắc địa-bản đồ sau khi ra trường có nhận thức đầy đủ về phương pháp luận trong tính toán bình sai cũng như có khả năng vận dụng kiến thức này vào một số nhiệm vụ có liên quan như kiểm tra chất lượng đo và đánh giá độ chính xác đo dựa vào sai số khép các phương trình điều kiện. Với tiêu chí đó, nội dung của phương pháp bình sai điều kiện chỉ được giới thiệu ở mức tương đối khái lược mà không trình bày quá chi tiết, đã lược bỏ bớt phương pháp bình sai chia nhóm phương trình điều kiện.

2.1. CƠ SỞ LÝ THUYẾT CỦA BÌNH SAI ĐIỀU KIỆN

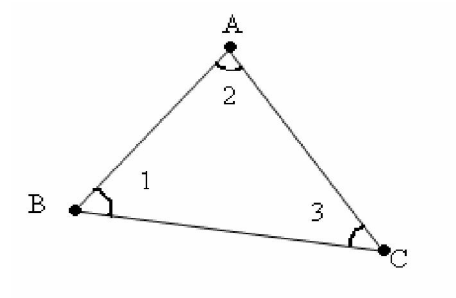
2.1.1 Khái niệm chung

Các mạng lưới trắc địa được xây dựng để xác định tọa độ x, y (đối với lưới mặt bằng) hoặc độ cao H (đối với lưới độ cao) hoặc giá trị trọng lực g (đối với lưới trọng lực) ... tại vị trí các mốc của mạng lưới. Một đặc điểm chung của các mạng lưới trắc địa là số trị đo trong lưới bao giờ cũng nhiều hơn số trị đo cần thiết, tức là có trị đo thừa (còn gọi là trị đo dư). Trị đo thừa không chỉ có tác dụng kiểm tra, phát hiện sai số thô trong kết quả đo mà còn có tác dụng nâng cao độ chính xác và tăng độ tin cậy các yếu tố cần xác định trong mạng lưới. Nhờ có trị đo thừa chúng ta có thể tiến hành đánh giá độ chính xác kết quả đo cùng với quy trình tính toán bình sai lưới.

Khi xuất hiện một trị đo thừa trong lưới, có thể dựa vào quan hệ hình học giữa các yếu tố trong mạng lưới để lập một phương trình điều kiện toán học ràng buộc trị bình sai của trị đo đó với trị bình sai của các trị đo khác hoặc với số liệu gốc trong lưới. Khi có r trị đo thừa ta sẽ lập được r phương trình điều kiện độc lập. Chính vì thế, bình sai điều kiện còn được gọi là bình sai với các phương trình điều kiện (*adjustment with condition equations*) [22].

Vì các trị đo luôn tồn tại sai số đo cho nên các trị đo không thỏa mãn phương trình điều kiện, nảy sinh các mâu thuẫn toán học. Nhiệm vụ của bài toán bình sai là xử lý các mâu thuẫn toán học đó, tìm giá trị xác suất nhất của đại lượng đo thỏa mãn đồng thời tất cả các phương trình điều kiện và đánh giá độ chính xác kết quả bình sai.

Giả sử trong một hình tam giác phẳng (hình 2.1) có 3 góc đo được ký hiệu là: $\hat{1},\hat{2},\hat{3}$; đồng thời ta ký hiệu $\hat{1}',\hat{2}',\hat{3}'$ là trị bình sai của 3 góc trong tam giác đó.



Hình 2.1.

Theo ý nghĩa hình học, tổng của 3 góc trong một hình tam giác phải bằng trị lý thuyết của nó tức là bằng 180^o, như vậy ta viết được phương trình điều kiện hình tam giác như sau:

$$\hat{1}' + \hat{2}' + \hat{3}' = 180^o \tag{2.1.1}$$

Vì các góc đo chứa sai số đo, do vậy tổng 3 góc đo sẽ không bằng 180^o , giá trị khác biệt giữa trị đo và trị lý thuyết được gọi là sai số khép w :

$$w = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} - 180^o \tag{2.1.2}$$

Các góc đo $\hat{1},\hat{2},\hat{3}$ sẽ được nhận số hiệu chỉnh tương ứng ký hiệu là v_1, v_2, v_3 để được giá trị bình sai thỏa mãn điều kiện (2.1.1), tức là:

$$(\hat{1} + v_1) + (\hat{2} + v_2) + (\hat{3} + v_3) = 180^o \tag{2.1.3}$$

Lưu ý tới ký hiệu (2.1.2), từ phương trình (2.1.3) ta nhận được phương trình điều hình ràng buộc các số hiệu chỉnh v_i ở dạng tuyến tính, gọi là phương trình điều kiện số hiệu chỉnh, có dạng như sau:

$$v_1 + v_2 + v_3 + w = 0 \tag{2.1.4}$$

Trên đây chỉ là một ví dụ đơn giản của một phương trình điều kiện, trên thực tế, chúng ta có thể gặp những phương trình điều kiện có dạng phức tạp hơn (dạng phi tuyến) và cần đến những biến đổi toán học để nhận được phương trình điều kiện số hiệu chỉnh ở dạng tuyến tính. Sau đây ta xét cho trường hợp các phương trình điều kiện đều có dạng tổng quát là dạng phi tuyến.

2.1.2. Cơ sở lý thuyết của phương pháp bình sai điều kiện

Giả thiết trong một mạng lưới trắc địa có n đại lượng được đo độc lập, các giá trị đo được ký hiệu là $L_1, L_2,..., L_n$ và có trọng số tương ứng là $p_1, p_2, ..., p_n$. Giá trị bình sai của đại lượng đo đó được ký hiệu là $L_1', L_2',..., L_n'$.

Số lượng trị đo cần thiết trong lưới là t (n > t), như vậy số lượng trị đo thừa trong lưới là:

$$r = n - t \tag{2.1.5}$$

Do có r trị đo thừa cho nên trong lưới sẽ có r phương trình điều kiện độc lập và có dạng tổng quát:

$$\varphi_j (L_1', L_2', \ldots\ldots L_n') = 0 \qquad \text{với } j = 1, 2, \ldots, r \tag{2.1.6}$$

Ký hiệu các số hiệu chỉnh của trị đo là $v_1, v_2, \ldots v_n$ sẽ viết được:

$$L_i' = L_i + v_i \qquad \text{với } i = 1 \div n \tag{2.1.7}$$

Thay vào (2.1.7) vào (2.1.6) ta được:

$$\varphi_j (L_1 + v_1, L_2 + v_2, \ldots\ldots L_n + v_n) = 0 \tag{2.1.8}$$

Vì các số hiệu chỉnh v_i là các giá trị khá nhỏ, cho nên có thể khai triển (2.1.8) theo chuỗi Taylor và giữ lại các số hạng bậc nhất của v_i để được phương trình điều kiện dạng tuyến tính:

$$\varphi_j(L_1, L_2, \ldots, L_n) + \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial L_1}\right)_o v_1 + \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial L_2}\right)_o v_2 + \ldots + \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial L_n}\right)_o v_n = 0 \tag{2.1.9}$$

Các giá trị đạo hàm riêng trong (2.1.9) đóng vai trò là các hệ số, được ký hiệu là:

$$\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial L_i}\right)_o = b_{j,i} \;;\; \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial L_i}\right)_o = b_i \;\ldots\ldots\; \left(\frac{\partial \varphi_r}{\partial L_i}\right)_o = r_i \tag{2.1.10}$$

Như đã biết, do các giá trị đo có chứa sai số đo cho nên chúng không thỏa mãn các phương trình điều kiện mà sẽ bằng sai số khép của phương trình, tức là:

$$\varphi_j (L_1, L_2, \ldots, L_n) = w_j \tag{2.1.11}$$

Như vậy các phương trình điều kiện (2.1.9) sẽ được viết ở dạng:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n + w_1 = 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n + w_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_n v_n + w_r = 0 \end{array}\right\} \tag{2.1.12}$$

Hoặc viết ở dạng ma trận:

$$B.V + W = 0 \tag{2.1.13}$$

trong đó: **B** gọi là ma trận hệ số phương trình số hiệu chỉnh, **V** là véc tơ số hiệu chỉnh, **W** là véc tơ sai số khép cũng chính là véc tơ số hạng tự do:

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ b_1 & b_2 & .... & b_n \\ .. & .. & .... & .. \\ r_1 & r_2 & .... & r_n \end{bmatrix};\ V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ .. \\ v_n \end{bmatrix};\ W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ .. \\ w_r \end{bmatrix} \qquad (2.1.14)$$

Trong hệ phương trình điều kiện (2.1.13) cần xác định n số hiệu chỉnh v_i cho n trị đo, trong khi số phương trình lại ít hơn, chỉ có r phương trình (r < n). Như vậy trong trường hợp này sẽ có thể tồn tại vô số véc tơ nghiệm **V** thỏa mãn hệ (2.1.13).

Để tìm được véc tơ số hiệu chỉnh **V** vừa thỏa mãn điều kiện (2.1.13) vừa bảo đảm các trị sau bình sai là trị xác suất nhất thì tổng [pvv] phải đạt giá trị cực tiểu, tức là thỏa mãn điều kiện bình phương nhỏ nhất, như đã chứng minh trong tiết 1.8 của chương 1.

Theo phương pháp này, chúng ta phải giải bài toán cực trị có điều kiện. Theo Lagrange, để đồng thời thỏa mãn [pvv]=min và các phương trình điều kiện (2.1.12) cần phải tìm cực trị của hàm Lagrange F như sau:

$$F = [pvv] + \lambda_1\{[av] + w_1\} + \lambda_2\{[bv] + w_2\} + ... + \lambda_r\{[rv] + w_r\} = min \qquad (2.1.15)$$

trong đó: λ_j là các hệ số bất định.

Lưu ý rằng, theo (2.1.12) các giá trị trong dấu móc $\{\ \}$ chính là các phương trình điều kiện (2.1.12) cho nên có giá trị bằng 0. Như vậy về thực chất giá trị hàm Lagrange F luôn bằng [pvv]:

$$F = [pvv] + 0 + 0 + ... + 0 = [pvv]$$

Để tiện cho việc tính toán, ta ký hiệu:

$$\lambda_j = -2.K_j \quad \text{với j=1,2...r} \qquad (2.1.16)$$

trong đó K_j được gọi là các số liên hệ.

Với ký hiệu (2.1.16), phương trình (2.1.15) viết dưới dạng ma trận:

$$\mathbf{F = V^T PV - 2K^T(BV + W)} = \min \qquad (2.1.17)$$

trong đó ma trận **P** và **K** có dạng:

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & .. & \\ & & & p_n \end{bmatrix};\ K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ .. \\ K_r \end{bmatrix} \qquad (2.1.18)$$

Để hàm F đạt giá trị cực tiểu thì thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{\partial F}{\partial V}=0,\ \ và\ \ \frac{\partial F^2}{\partial V^2}>0 \qquad (2.1.19)$$

Từ (2.1.17) ta có:

$$\frac{\partial F}{\partial V}=2V^TP-2K^TB=0$$

(2.1.20)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}=2P>0$$

Suy ra:

$$\mathbf{PV = B^TK}$$

Như vậy:

$$\mathbf{V = P^{-1}B^TK} \qquad (2.1.21)$$

Thay V từ (2.1.21) vào (2.1.13) ta lập được hệ phương trình chuẩn số liên hệ:

$$\mathbf{BP^{-1}B^T\ K + W = 0} \qquad (2.1.22)$$

Như vậy, để giá trị của hàm Lagrange F = [pvv] = min thì các số liên hệ K phải là nghiệm của hệ phương trình chuẩn (2.1.22) và véc tơ **V** phải được tính theo (2.1.21).

Ký hiệu ma trận hệ số phương trình chuẩn là **N**:

$$N=B.P^{-1}B^T \qquad (2.1.23)$$

Ma trận **N** là ma trận vuông đối xứng qua đường chéo chính, có kích thước bằng số lượng trị đo thừa r. Nếu xác định đủ và đúng các phương trình điều kiện trong lưới, ma trận **N** sẽ là ma trận không suy biến (det(N) ≠ 0).

Với ký hiệu **N**, hệ phương trình chuẩn số liên hệ được viết:

$$\mathbf{NK+W=0} \qquad (2.1.24)$$

Giải hệ phương trình chuẩn (2.1.24) ta được:

$$\mathbf{K= -N^{-1}W} \qquad (2.1.25)$$

Trong tính toán trước đây, hệ (2.1.22) được viết ở dạng khai triển:

$$[qaa]K_1+[qab]K_2+.....+[qar]K_r+w_1=0$$

$$[qab]K_1+[qbb]K_2+.....+[qbr]K_r+w_2=0$$

$$. . . . . \qquad (2.1.26)$$

$$[\,qar\,]K_1 + [\,qbr\,]K_2 + ... + [\,qrr\,]K_r + w_r = 0$$

trong đó sử dụng ký hiệu:

$$q_i = \frac{1}{p_i} \qquad (2.1.27)$$

Trường hợp các trị đo cùng độ chính xác, thì ma trận trọng số **P** là ma trận đơn vị (**P = E**), hệ phương trình chuẩn có dạng:

$$\begin{aligned}
&[\,aa\,]K_1 + [\,ab\,]K_2 + ... + [\,ar\,]K_r + w_1 = 0 \\
&[\,ab\,]K_1 + [\,bb\,]K_2 + ... + [\,br\,]K_r + w_2 = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.1.28) \\
&[\,ar\,]K_1 + [\,br\,]K_2 + ... + [\,rr\,]K_r + w_r = 0
\end{aligned}$$

Việc giải hệ phương trình chuẩn số liên hệ để nhận được véc tơ số liên hệ **K** sẽ được giới thiệu chi tiết trong tiết 2.3 của chương này.

Lưu ý rằng, (2.1.21) là công thức tính các số hiệu **V** chỉnh theo số liên hệ **K**, có thể viết ở dạng khai triển:

$$v_i = \frac{1}{p_i}(\,a_i.K_1 + b_i.K_2 + ... + r_i.K_r\,) \qquad (2.1.29)$$

Sau khi có được các số hiệu chỉnh cho trị đo, sẽ tính được [pvv] và từ đó tính được sai số trung phương trọng số đơn vị theo công thức:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\,pvv\,]}{r}} \qquad (2.1.30)$$

Dựa vào sai số trung phương trọng số đơn vị μ và trọng số đảo của hàm các đại lượng đo sau bình sai, sẽ tính được sai số trung phương của các yếu tố trong mạng lưới. Nội dung này sẽ được trình bày kỹ trong tiết 2.4.

2.1.3. Xác định lượng đo thừa trong lưới trắc địa

Như đã trình bày ở trên, khi bình sai lưới trắc địa theo phương pháp bình sai điều kiện phải xác định đủ và xác định đúng các phương trình điều kiện độc lập trong lưới. Nếu xác định thiếu hoặc thừa hoặc không đúng các phương trình điều kiện đều dẫn đến kết quả sai. Như vậy để bình sai điều kiên, cần tính được số trị đo thừa dựa vào số trị đo cần thiết và tổng số trị đo trong mạng lưới. Công thức chung để tính số lượng trị đo thừa (r) trong lưới trắc địa là:

$$r = n - t \qquad (2.1.31)$$

trong đó: n là tổng số trị đo

t là số trị đo cần thiết

Trong mỗi dạng lưới khác nhau, cách tính trị đo cần thiết cũng khác nhau.. Sau đây xét cho một số dạng lưới có đủ hoặc thừa số liệu gốc. Không xét cho các dạng lưới thiếu số liệu gốc, dạng lưới này là lưới tự do sẽ được trình bày trong tài liệu khác.

2.1.3.1. Lưới độ cao

Số liệu gốc tối thiểu cho một lưới độ cao là độ cao đã biết của một điểm (mốc) trong lưới. Trong lưới độ cao, mỗi điểm cần xác định (mốc mới) có một giá trị độ cao H cần xác định, tức là cần tối thiểu một trị đo, như vậy số trị đo cần thiết được tính:

$$t = p - p^* \qquad (2.1.32)$$

Trong đó:

p là tổng số điểm trong lưới độ cao.

p^* là số điểm đã biết độ cao, chỉ xét cho trường hợp $p^* \geq 1$

Như vậy, nếu ký hiệu *n* là số đoạn đo thì số trị đo thừa trong lưới độ cao được tính theo công thức:

$$r = n - t = n - (p - p^*) \qquad (2.1.33)$$

2.1.3.2. Lưới mặt bằng

Có nhiều dạng lưới mặt bằng khác nhau như lưới tam giác đo góc, lưới tam giác đo cạnh, lưới tam giác đo góc-cạnh, lưới đường chuyền đa giác vv...Đối với lưới tam giác đo góc, số liệu gốc tối thiểu thường là tọa độ của 2 điểm khởi tính, tuy nhiên cũng có thể là 1 điểm khởi tính nhưng trong lưới phải có chiều dài cạnh đo và giá trị góc phương vị khởi tính (thí dụ thông qua đo góc nối). Đối với lưới mặt bằng, mỗi điểm mới cần xác định một cặp giá trị tọa độ x và y, do đó cần tối thiểu 2 trị đo, như vậy số trị đo cần thiết trong lưới mặt bằng (t) được tính:

$$t = 2(p - p^*) \qquad (2.1.34)$$

Trong đó:

p là tổng số điểm trong lưới mặt bằng.

p^* là số điểm đã biết tọa độ (chỉ xét cho trường hợp có đủ hoặc thừa số liệu gốc)

Từ đó ta có công thức tính số trị đo thừa r trong lưới mặt bằng:

$$r = n - t = n - 2(p - p^*) \qquad (2.1.35)$$

trong đó: *n* là tổng số trị đo của mạng lưới.

2.1.3.3. Lưới GPS

Số liệu gốc tối thiểu cho một lưới GPS là tọa độ X,Y,Z (hoặc B,L,H) đã biết của một điểm trong lưới, gọi là điểm khởi tính. Trong mạng lưới GPS, mỗi điểm mới cần xác định 3 giá trị tọa độ vuông góc không gian X,Y,Z , như vậy cần tối thiểu 3 trị đo. Số trị đo cần thiết trong lưới GPS được tính:

$$t = 3(p - p^*) \tag{2.1.36}$$

trong đó : p là tổng số điểm trong lưới

p^* là số điểm đã biết tọa độ (với $p^* \geq 1$)

Từ đó, tính được số trị đo thừa trong lưới GPS theo công thức:

$$r = n - 3(p - p^*) \tag{2.1.37}$$

Cần lưu ý rằng, trong lưới GPS, mỗi véc tơ cạnh được đo đã gồm 3 trị đo là các gia số tọa độ vuông góc không gian $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$.

2.2. CÁC DẠNG PHƯƠNG TRÌNH ĐIỀU KIỆN

Các loại lưới trắc địa khác nhau như lưới độ cao, lưới mặt bằng, lưới GNSS, lưới trọng lực vv... sẽ có dạng phương trình điều kiện rất khác nhau. Ngay trong một mạng lưới cũng có thể xuất hiện các phương trình điều kiện có dạng toán học khác nhau. Đó cũng chính là nhược điểm của phương pháp bình sai điều kiện, khiến việc lập chương trình máy tính để bình sai lưới theo phương pháp điều kiện phức tạp hơn so với phương pháp bình sai gián tiếp.

2.2.1 Các dạng phương trình điều kiện trong lưới độ cao

Trị đo trong lưới độ cao là chênh cao đo (hay hiệu độ cao) của các đoạn đo, ký hiệu là h_i. Trong lưới độ cao có thể lập các phương trình điều kiện như sau:

a. Điều kiện khép vòng

Ý nghĩa hình học của điều kiện này là tổng chênh cao sau bình sai của một đường thủy chuẩn khép kín phải bằng 0.

$$\sum_{i=1}^{n} h'_i = 0 \tag{2.2.1}$$

Trong đó : h_i' là các chênh cao sau bình sai, n là số đoạn đo trong vòng khép.

Vì phương trình điều kiện trong lưới độ cao đã là phương trình dạng tuyến tính (không cần phải khai triển tuyến tính) cho nên dễ dàng có được phương trình điều kiện số hiệu chỉnh như sau:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i + w = 0 \tag{2.2.2}$$

Trong đó số hạng tự do w được tính:

$$w = \sum_{i=1}^{n} h_i \tag{2.2.3}$$

Lưu ý rằng số hạng tự do w trong phương trình điều kiện (2.2.2) cũng chính là sai số khép độ cao f_h :

$$w = \sum_{i=1}^{n} h_i = f_h \tag{2.2.4}$$

b. Điều kiện khép tuyến độ cao giữa hai điểm gốc

Ý nghĩa hình học của điều kiện này là xuất phát từ điểm gốc đã biết độ cao tính chuyền độ cao thông qua các chênh cao sau bình sai đến một điểm gốc khác phải bằng độ cao đã biết của nó. Nếu ký hiệu $H_Đ$ là độ cao của mốc đầu tuyến và H_C là độ cao của mốc cuối tuyến, ta có phương trình điều kiện :

$$H_Đ + \sum_{i=1}^{n} h_i' = H_C \tag{2.2.5}$$

Từ đó lập được phương trình điều kiện số hiệu chỉnh:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i + w = 0 \tag{2.2.6}$$

Trong đó số hạng tự do được tính:

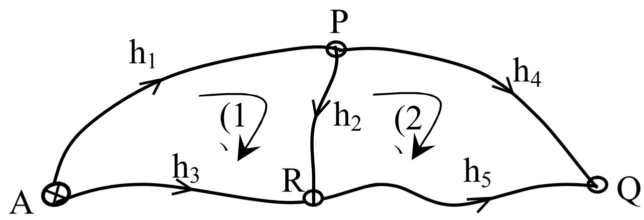
$$w = \sum_{i=1}^{n} h_i - (H_C - H_Đ) \tag{2.2.7}$$

Khi lập phương trình điều kiện trong lưới độ cao cần chú ý:

- Phải đánh số thứ tự tuyến đo và chọn chiều cho đường tính chuyền.

- Chênh cao nào cùng chiều với chiều tính chuyền thì có hệ số trong phương trình điều kiện số hiệu chỉnh là (+1), chênh cao nào ngược chiều với chiều tính chuyền thì hệ số trong phương trình điều kiện số hiệu chỉnh là (-1).

Ví dụ 1 : Có mạng lưới độ cao được bố trí như hình (2.2). Điểm A đã biết độ cao, có 3 điểm cần xác định là P, Q, R, trong lưới có 5 đoạn đo với các chênh cao đo là h_i. Hãy lập các phương trình điều kiện số hiệu chỉnh cho lưới độ cao này.



Hình 2.2. Lưới độ cao có 5 đoạn đo

Lời giải :

Theo công thức (2.1.33), tính được số lượng phương trình điều kiện trong lưới :

$$r = n - t = n - (p - 1) = 5 - 3 = 2$$

Phương trình điều kiện ràng buộc các trị bình sai:

$$h_1' + h_2' - h_3' = 0$$

$$-h_2' + h_4' - h_5' = 0$$

Từ đó có các phương trình điều kiện số hiệu chỉnh:

$$v_1 + v_2 - v_3 + w_1 = 0$$

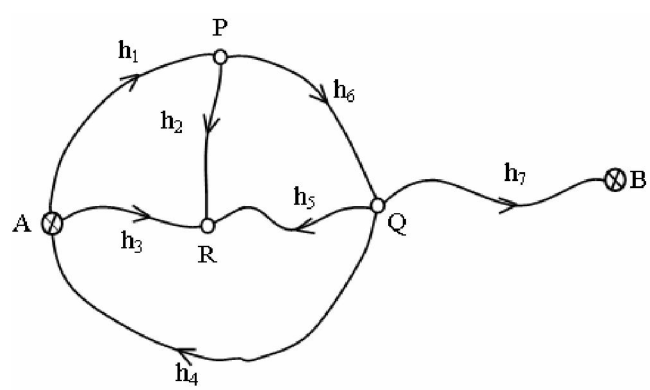
$$-v_2 + v_4 - v_5 + w_2 = 0$$

Trong đó, các số hạng tự do được tính:

$$w_1 = h_1 + h_2 - h_3$$

$$w_2 = -h_2 + h_4 - h_5$$

Ví dụ 2: Có mạng lưới độ cao như hình (2.3), hai điểm A, B đã biết độ cao, có 3 điểm cần xác định là P, Q, R, trong lưới có 7 đoạn đo. Hãy lập các phương trình điều kiện số hiệu chỉnh trong lưới.



Hình 2.3. Lưới độ cao có 7 đoạn đo

Lời giải:

Theo công thức (2.1.33), tính được số lượng phương trình điều kiện:

$$r = n - t = 7 - 3 = 4$$

Với đồ hình lưới độ cao đã cho, có hai phương án lập các phương trình điều kiện:

a. Phương án 1

Phương trình điều kiện đối với các trị bình sai:

$$h_1' + h_2' - h_3' = 0$$

$$- h_2' + h'_5 + h'_6 = 0$$

$$h_3' + h_4' - h_5' = 0$$

$$- h_4' + h_7' + H_A - H_B = 0$$

Phương trình điều kiện số hiệu chỉnh:

$$v_1 + v_2 - v_3 + w_1 = 0$$

$$- v_2 + v_5 + v_6 + w_2 = 0$$

$$v_3 + v_4 - v_5 + w_3 = 0$$

$$- v_4 + v_7 + w_4 = 0$$

Trong đó:

$$w_1 = h_1 + h_2 - h_3$$

$$w_2 = - h_2 + h_5 + h_6$$

$$w_3 = h_3 + h_4 - h_5$$

$$w_4 = - h_4 + h_7 + H_A - H_B$$

b. Phương án 2

Phương trình điều kiện đối với các trị bình sai:

$$-h_1' - h_2' + h_3' = 0$$

$$h_2' - h'_5 - h'_6 = 0$$

$$- h_3' - h_4' + h_5' = 0$$

$$h_1' + h_6' + h_7' + H_A - H_B = 0$$

Phương trình điều kiện số hiệu chỉnh:

$$-v_1 - v_2 + v_3 + w_1 = 0$$

$$v_2 - v_5 - v_6 + w_2 = 0$$

$$- v_3 - v_4 + v_5 + w_3 = 0$$

$$v_1 + v_6 + v_7 + w_4 = 0$$

Trong đó:

$$w_1 = -h_1 - h_2 + h_3$$

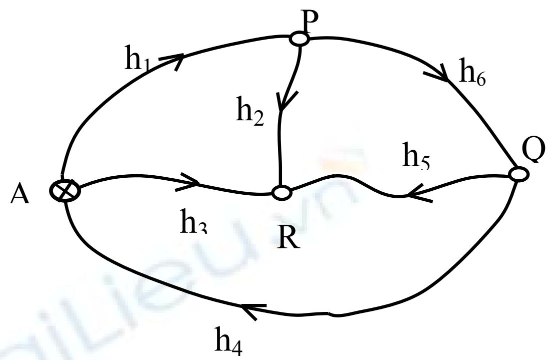
$$w_2 = h_2 - h_5 - h_6$$

$$w_3 = - h_3 - h_4 + h_5$$

$$w_4 = h_1 + h_6 + h_7 + H_A - H_B$$

Phương án tối ưu khi viết phương trình điều kiện nên chọn đường tính chuyền độ cao ngắn nhất. Với mạng lưới ở hình (2.3) nên chọn phương án 1

Ví dụ 3: Cho mạng lưới độ cao như hình 2.4, trong đó có mốc A đã biết độ cao, lưới có 6 đoạn đo. Hãy viết các phương trình điều kiện số hiệu chỉnh trong lưới.



Hình 2.4 . Lưới độ cao có 6 đoạn đo

Lời giải:

Theo công thức (2.1.33) tính được số lượng phương trình điều kiện:

$$r= n- t= 6- 3= 3$$

Phương trình điều kiện số hiệu chỉnh:

$$v_1+v_2 - v_3 + w_1 =0; \text{ với } w_1 = h_1 +h_2 - h_3$$

$$- v_2+v_5 + v_6 +w_2 =0; \text{ với } w_2 = -h_2 +h_5 + h_6$$

$$v_3+v_4 - v_5 + w_3 =0; \text{ với } w_3 = h_3 +h_4 - h_5$$

2.2.2 Các dạng phương trình điều kiện trong lưới mặt bằng

Có nhiều dạng lưới mặt bằng khác nhau như lưới tam giác đo góc, lưới tam giác đo hướng, lưới tam giác đo cạnh, lưới tam giác đo góc-cạnh, lưới đường chuyền đa giác. Các trị đo trong lưới mặt bằng thường là góc ngang và chiều dài cạnh. Mỗi điểm mới trong lưới mặt bằng có một cặp giá trị tọa độ x,y cần xác định.

Trong tiết 2.1 đã nêu công thức (2.1.32) để xác định số lượng trị đo thừa trong lưới mặt bằng, tuy nhiên dạng của phương trình lại tùy thuộc vào dạng lưới, loại trị đo và số liệu gốc trong lưới. Sau đây, sẽ xem xét các phương trình điều kiện có thể xuất hiện trong lưới mặt băng thường gặp.

2.2.2.1. Các phương trình điều kiện trong lưới tam giác đo góc

Lưới tam giác đo góc là dạng lưới có kết cấu bởi các hình tam giác, giá trị góc ở đỉnh tam giác thường nằm trong phạm vi từ 30^o đến 120^o và được đo bằng máy kinh vĩ. Các góc trong tam giác được sử dụng để tính chuyền chiều dài cạnh (theo định lý sin) từ cạnh khởi tính đến các cạnh khác trong lưới tam giác phục vụ cho tính chuyền tọa độ từ điểm khởi tính (điểm đã biết hay điểm gốc) đến các điểm cần xác định tọa độ.

Tùy thuộc vào kết cấu lưới và số liệu gốc, trong lưới tam giác đo góc có thể xuất hiện các phương trình điều kiện sau:

- Phương trình điều kiện hình tam giác
- Phương trình điều kiện vòng (hay điều kiện mặt bằng)
- Phương trình điều kiện cực
- Phương trình điều kiện phương vị (góc định hướng)
- Phương trình điều kiện tọa độ vv...

Sau đây chúng ta xét cách xác định và thành lập các phương trình điều kiện nêu trên.

a. Phương trình điều kiện hình

Ý nghĩa hình học của phương trình điều kiện hình là: Tổng trị bình sai của các góc trong một đa giác khép kín phải bằng giá trị lý thuyết của nó tức là bằng $(n-2).180^o$ (với n là số cạnh của đa giác khép kín).

Số lượng phương trình điều kiện hình (r_h) có thể xác định theo công thức:

$$r_h = 1 + \ell_1 - p_1 \qquad (2.2.8)$$

Trong đó: ℓ_1 là số cạnh đo 2 hướng

p_1 là số điểm đặt trạm máy

Nếu ký hiệu $\beta_1, \beta_2 .... \beta_n$ là trị đo của n góc trong hình đa giác khép kín, $\beta_1', \beta_2', ... \beta_n'$ là trị bình sai của các góc đó, ta viết được phương trình điều kiện hình:

$$\beta_1' + \beta_2' + ... + \beta_n' = (n-2).180^0 \qquad (2.2.9)$$

Từ phương trình trên ta viết được phương trình điều kiện số hiệu chỉnh

$$v_1 + v_2 + ... + v_n + w_h = 0 \qquad (2.2.10)$$

Trong đó v_i là số hiệu chỉnh cho góc đo, w_h là sai số khép hình được tính theo các trị đo như sau:

$$w_h = \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n - (n-2).180^o \qquad (2.2.11)$$

Trong mục 2.1.1. chúng ta đã xét phương trình điều kiện hình tam giác (hình 2.1) và viết phương trình điều kiện số hiệu chỉnh hình tam giác như sau:

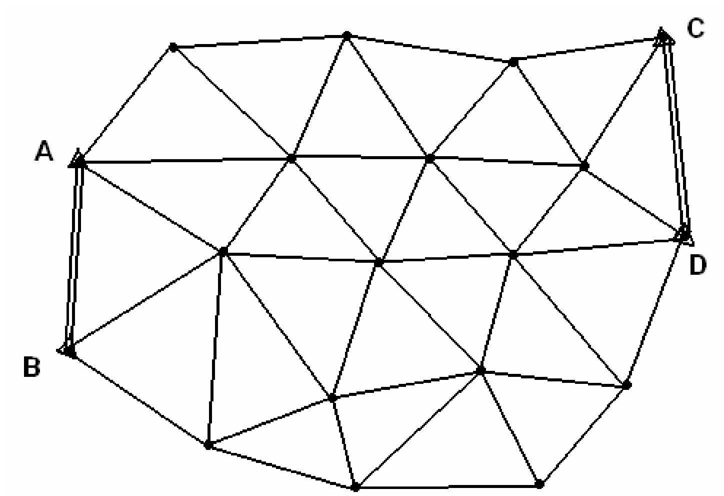
$$v_1 + v_2 + v_3 + w = 0 \qquad (2.2.12)$$

trong đó, số hạng tự do *w* được tính theo giá trị đo $\hat{1},\hat{2},\hat{3}$ của 3 góc trong tam giác.

$$w = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} - 180^o \qquad (2.2.13)$$

Đối với lưới tam giác đo góc có kết cấu tam giác thuần túy (không có hình tứ giác trắc địa) (hình 2.5) thì mỗi tam giác đo cả 3 góc đều có một phương trình điều kiện hình viết ở dạng (2.2.12).

Trong lưới tam giác đo góc khi có kết cấu lưới dạng hình tứ giác trắc địa, thì chỉ cần chọn 3 điều kiện hình trong 4 tam giác của hình tứ giác đó. Trong hình tứ giác trắc địa đo góc, cũng có thể chọn điều kiện hình tứ giác thay cho một điều kiện hình tam giác.



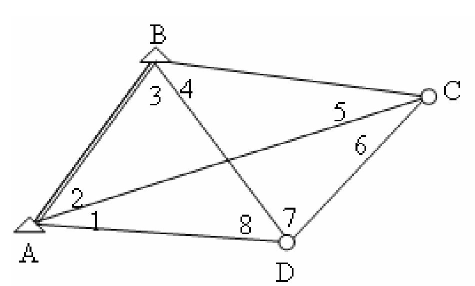
Hình 2.5. Lưới có kết cấu tam giác thuần túy

Ví dụ 1: Hãy xác định số lượng phương trình điều kiện trong lưới tam giác đo góc có dạng tứ giác trắc địa như hình 2.6

Lời giải: Theo công thức (2.1.35) ta có:

Số góc đo: n = 8

Tổng số điểm : p = 4



Hình 2.6. Hình tứ giác trắc địa

Số điểm gốc: P*=2

Số phương trình điệu kiện trong lưới sẽ là:

$$r = n - 2(p - p^*) = 8 - 2(4 - 2) = 4$$

Trong lưới có 4 phương trình nhưng không phải tất cả là điều kiện hình mà chỉ có 3 điều kiện hình là độc lập tuyến tính. Điều kiện thứ 4 là điều kiện cực. Trong 4 hình tam giác chúng ta được phép chọn 3 hình tam giác để lập 3 phương trình điều kiện hình. Đối với đồ hình 2.6, ta có thể chọn 3 hình tam giác để viết 3 phương trình điều kiện như sau:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_8 + w_1 = 0$$

$$v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + w_2 = 0$$

$$v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + w_3 = 0$$

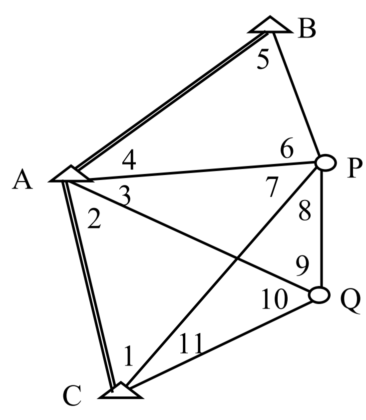
trong đó, các số hạng tự do được tính:

$$w_1 = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{8} - 180^o$$

$$w_2 = \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} + \hat{7} - 180^o$$

$$w_3 = \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} - 180^o$$

Ví dụ 2: Hãy xác định số lượng và viết các phương trình điều kiện trong lưới tam giác đo góc sau (hình 2.7):



Hình 2.7. Lưới tam giác

Lời giải: Với đồ hình trên, ta có:

Tổng số điểm trong lưới: p = 5,

Số điểm đã biết: $p^* = 3$,

Tổng số góc đo: n = 11

Như vậy, số lượng phương trình điều kiện được tính:

$$r = n - 2(p - p^*) = 11 - 2(5 - 3) = 7$$

Theo công thức (2.2.8), tính được số phương trình điều kiện hình:

$$r_h = 1 + \ell_1 - p_1 = 1 + 8 - 5 = 4$$

Các phương trình điều kiện hình sẽ là:

$v_1 + v_2 + v_{10} + v_{11} + w_1 = 0$; $w_1 = 1 + 2 + 10 + 11 - 180^o$

$v_3 + v_7 + v_8 + v_9 + w_2 = 0$; $w_2 = 3 + 7 + 8 + 9 - 180^o$

$v_1 + v_2 + v_3 + v_7 + w_3 = 0$; $w_3 = 1 + 2 + 3 + 7 - 180^o$

$v_4 + v_5 + v_6 + w_4 = 0$; $w_4 = 4 + 5 + 6 - 180^o$

b. Phương trình điều kiện vòng:

Ý nghĩa hình học của phương trình điều kiện vòng là: Trên trạm máy có n hướng, trị bình sai của tổng n góc có đỉnh chung là trạm máy đó phải bằng 360^o. Phương trình điều kiện vòng chỉ xuất hiện trong lưới tam giác đo góc có kết cấu dạng đa giác trung tâm (hình 2.8). Phương trình điều kiện vòng còn được gọi là phương trình điều kiện mặt bằng hay phương trình điều kiện góc đầy [7].

Số lượng phương trình điều kiện vòng được xác định theo công thức:

$$r_v = n - (\ell + \ell_1) + p_1 \qquad (2.2.14)$$

Trong đó : ℓ là số cạnh trong lưới

ℓ_1 là số cạnh đo 2 hướng

p_1 là số điểm đặt trạm máy

Ký hiệu β_i' là các góc bình sai, phương trình điều kiện vòng có dạng:

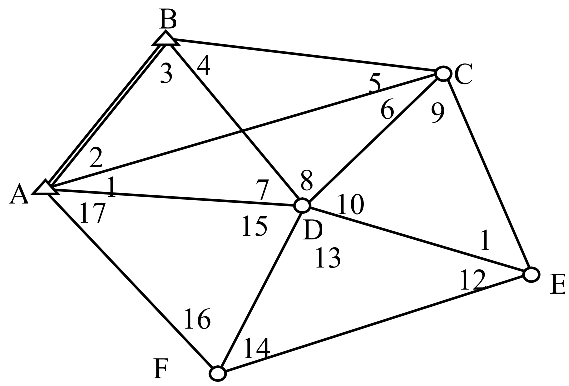
$$\beta_1' + \beta_2' + \ldots + \beta_n' = 360^0$$

Từ phương trình trên ta viết được phương trình điều kiện số hiệu chỉnh:

$$v_1 + v_2 + \ldots. + v_n + w_v = 0 \qquad (2.2.15)$$

trong đó: $w_v = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n - 360^0$

Ví dụ : Cho lưới tam giác đo góc như hình 2.8. Trong lưới có 17 góc đo. A, B là hai điểm khởi tính. Hãy xác định số lượng phương trình điều kiện vòng trong lưới và viết phương trình điều kiện số hiệu chỉnh .



Hình 2.8. Lưới đa giác trung tâm

Lời giải: Số phương trình điều kiện vòng được xác định theo công thức :

$$r_v = n - (\ell \quad + \ell_1) + p_1 = 17 - (11 + 11) + 6 = 1$$

Phương trình điều kiện vòng là phương trình dạng tuyến tính, do đó ta có thể viết ngay phương trình điều kiện số hiệu chỉnh:

$$v_7 + v_8 + v_{10} + v_{13} + v_{15} + w_v = 0$$

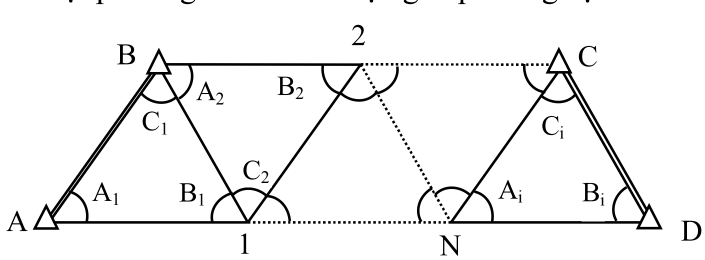
trong đó: $w_v = \hat{7} + \hat{8} + \hat{10} + \hat{13} + \hat{15} - 360^0$

c. Phương trình điều kiện góc phương vị

Trong mạng lưới tam giác đo góc, khi có thừa phương vị khởi tính (phương vị gốc) sẽ xuất hiện các phương trình điều kiện phương vị (điều kiện góc định hướng). Phương vị gốc có thể là các phương vị Laplace trong lưới tam giác hạng I, II nhà nước hoặc là phương vị cố định được tính ra từ tọa độ các điểm cấp cao hơn.

Ý nghĩa hình học của phương trình điều kiện phương vị là: Xuất phát từ phương vị cạnh đầu đã biết $\alpha_đ$ dùng trị bình sai của các góc tính chuyền phương vị đến phương vị cạnh cuối α_c thì phải đúng bằng phương vị đã biết.

Ví dụ có chuỗi tam giác hình 2.9, các điểm A, B, C, D đã biết tọa độ (điểm khởi tính), điểm 1, 2...N là các điểm cần xác định tọa độ; A_i, B_i, C_i là góc đo với $(i=1 \div n)$. Chúng ta thấy rằng, trong chuỗi tam giác có 2 phương vị gốc là α_{AB}, α_{CD} ở hai đầu, các giá trị phương vị này được tính ra từ tọa độ các điểm khởi tính. Như vậy trong chuỗi sẽ có một phương trình điều kiện góc phương vị.



Hình 2.9. Chuỗi tam giác

Phương trình điều kiện góc phương vị được viết:

$$\alpha_{AB} + \sum_{i=1}^{n} \pm C_i' - \alpha_{CD} \pm 180^0 = 0$$

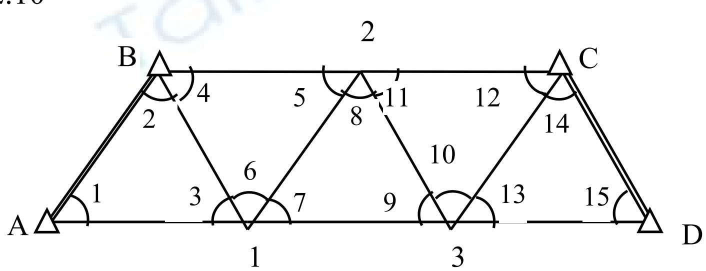
trong đó $C_i^{'}$ là góc sau bình sai

Phương trình điều kiện vị vốn có dạng phương trình tuyến tính, do đó không cần khai triển tuyến tính, như vậy dễ dàng có được phương trình điều kiện số hiệu chỉnh:

$$\sum_{i=1}^{n} \pm V_{C_i} + w_\alpha = 0 \qquad (2.2.16)$$

trong đó: $w_\alpha = \alpha_{AB} + \sum_{i=1}^{n} \pm C_i - \alpha_{CD} \pm 180^0$

Ví dụ 1: Viết phương trình điều kiện góc phương vị cho chuỗi tam giác đo góc ở hình 2.10



Hình 2.10. Chuỗi tam giác

Lời giải : Phương trình điều kiện phương vị được viết:

$$\alpha_{AB} - \hat{2}' + \hat{6}' - \hat{8}' + \hat{10}' - \hat{14}' - \alpha_{CD} + 180^0 = 0$$

Dạng phương trình điều kiện số hiệu chỉnh:

$$- v_2 + v_6 - v_8 + v_{10} - v_{14} + w_\alpha = 0$$

Trong đó sai số khép của điều kiện phương vị được tính :

$$w_\alpha = \alpha_{AB} - \hat{2} + \hat{6} - \hat{8} + \hat{10} - \hat{14} - \alpha_{CD} + 180^0$$

Trong phương trình điều kiện số hiệu chỉnh, dấu của hệ số số hiệu chỉnh được xác định theo nguyên tắc tính chuyền phương vị. Hệ số của số hiệu chỉnh có dấu dương khi góc nằm bên trái đường tính chuyền, hệ số của số hiệu chỉnh có dấu âm khi góc nằm bên phải đường tính chuyền.

Ví dụ 2: Viết phương trình điều kiện góc phương vị cho lưới tam giác ở hình (2.7)

Lời giải: Trong lưới có hai cạnh có phương vị khởi tính là α_{AB} và α_{AC} cho nên có một phương trình điều kiện góc phương vị:

$$v_2 + v_3 + v_4 + w_\alpha = 0$$

Trong đó, số hạng tự do w_α được tính:

$$w_\alpha = \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} - (\alpha_{AC} - \alpha_{AB})$$

Trường hợp như hình (2.7) hai phương vị đã biết α_{AB} và α_{AC} ở kề liền nhau tạo thành một góc cố định, do đó trong trường hợp này phương trình điều kiện phương vị còn được gọi là phương trình điều kiện góc cố định.

d. Phương trình điều kiện cực

Ý nghĩa hình học của phương trình điều kiện cực là: Xuất phát từ một cạnh nào đó thông qua trị bình sai của các góc, áp dụng định lý sin tính chuyền chiều dài theo một vòng khép kín trở về cạnh xuất phát, phải nhận được chiều dài đúng bằng chiều dài ban đầu của nó.

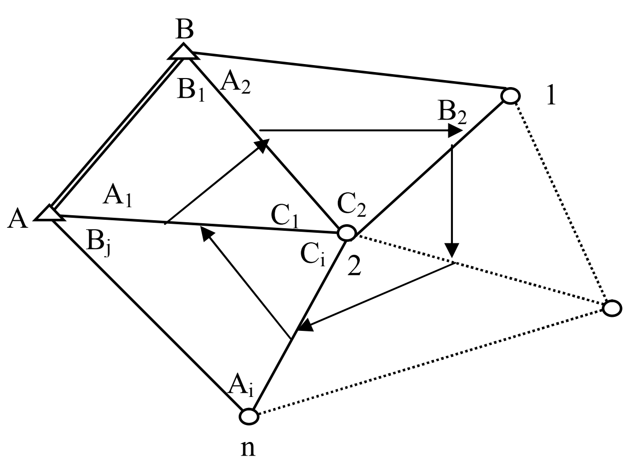
Số lượng phương trình điều kiện cực được xác định theo công thức:

$$r_c = \ell - 2p + 3 \tag{2.2.17}$$

Trong đó: ℓ là số cạnh trong lưới

p là số điểm đặt trạm đo góc

Ví dụ có lưới đa giác trung tâm hình 2.11, có điểm A, B đã biết tọa độ, A_i, B_j, C_i là góc đo, từ cạnh bất kỳ ta áp dụng đinh lý sin tính chuyền chiều dài theo một vòng khép kín về chính cạnh đó sẽ bằng đúng giá trị cạnh xuất phát.



Hình 2.11. Điều kiện cực trong đa giác trung tâm

Với ý nghĩa hình học như vậy, có thể viết phương trình điều kiện cực dưới dạng:

$$\frac{\prod sin\, A_i^{'}}{\prod sin\, B_i^{'}} = 1 \qquad (2.2.18)$$

Sau khi thay trị bình sai $A_i^{'}$, $B_j^{'}$ trong (2.2.18) bằng trị đo cộng số hiệu chỉnh, ta có phương trình:

$$\varphi(A_i, B_j) = \frac{\prod \sin(A_i + v_{A_i})}{\prod \sin(B_i + v_{B_i})} - 1 = 0 \qquad (2.2.19)$$

Để đưa phương trình (2.2.19) về dạng tuyến tính, ta tính đạo hàm riêng theo các góc A_i, B_i.

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial A_i}\right) = cot\, gA_i; \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial B_i}\right) = -cot\, gB_i \qquad (2.2.20)$$

Vậy phương trình điều kiện số hiệu chỉnh là:

$$\sum_{i=1}^{n} cot\, gA_i.v_{A_i} - \sum_{i=1}^{n} cot\, gB_i.v_{B_i} + w_C = 0 \qquad (2.2.21)$$

Trong đó w_c được tính:

$$w_C = \left(\frac{\prod_i SinA_i}{\prod_i SinB_i} - 1\right)\rho^{''} \qquad (2.2.22)$$

Ngoài ra có thể sử dụng phương pháp logarit để chuyển phương trình (2.2.18) về dạng tuyến tính.

Từ phương trình điều kiện (2.2.18) tiến hành logarit cơ số 10 hai vế và triển khai về dạng tuyến tính, ta được phương trình điều kiện số hiệu chỉnh dạng:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{A_i} V_{A_i} - \sum_{i=1}^{n} \delta_{B_i} V_{B_i} + w_c = 0 \qquad (2.2.23)$$

trong đó: $\delta_{A_i}, \delta_{B_j}$ là giá trị biến thiên của logarit sin góc A_i, B_j khi góc thay đổi $1^{''}$, thường được tính ở đơn vị số lẻ thứ 6 của logarit.

$$\delta_{A_i} = \frac{M.10^6}{\rho^{''}} cot\, gA_i \qquad (2.2.24)$$

$$\delta_{B_i} = \frac{M.10^6}{\rho^{''}} cot\, gB_i$$