Trường Đại Học Sư Phạm Kỹ Thuật TP.Hồ Chí Minh
Khoa Khoa Học Cơ Bản
Bộ Môn Toán

GIÁO TRÌNH

TOÁN CAO CẤP A_2

(Lưu hành nội bộ - Tháng 9/ 2016)

Lời mở đầu

Giáo trình ***“Toán Cao cấp A$_2$”*** này được biên soạn nhằm phục vụ cho nhu cầu về tài liệu học tập của sinh viên Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật thành phố Hồ Chí Minh. *Nội dung giáo trình này gồm 5 chương:*

Chương 1 : *Ma trận – Định thức.*

Chương 2 : Hệ phương trình tuyến tính.

Chương 3: *Không gian vec tơ-Không gian Euclide và hình học giải tích.*

Chương 4: *Trị riêng, vec tơ riêng, chéo hóa ma trận, dạng toàn phương.*

Chương 5: *Phép tính vi phân hàm nhiều biến và ứng dụng.*

Nội dung môn học như trên là khá phong phú. Tuy nhiên, thời lượng dành cho môn học này chỉ có 3 tín chỉ (45 tiết lên lớp) là hơi ít. Do đó, để tiếp thu tốt môn học, các bạn sinh viên cần đọc kỹ bài học trong giáo trình trước khi đến lớp. Các bạn cần làm bài tập đầy đủ để hiểu rõ nắm vững các khái niệm, nội dung, ý nghĩa các bài toán và suy nghĩ về việc ứng dụng vào đời sống.

Trước mỗi chương hay mỗi bài tác giả nêu ra những nội dung, những kiến thức cơ bản mà sinh viên cần phải đạt được. Dựa vào đó mà các bạn sinh viên biết được mình sẽ phải học những gì, cần phải hiểu rõ những khái niệm nào, những nội dung nào cần phải nắm vững và những bài toán dạng nào phải làm được. Trong mỗi chương, tác giả đưa vào khá nhiều ví dụ phù hợp để minh họa làm sáng tỏ các khái niệm vừa được trình bày đồng thời chỉ ra được rất nhiều ứng dụng vào thực tế. Sau mỗi chương hay bài học có phần bài tập được chọn lọc phù hợp để sinh viên tự luyện tập nhằm đạt được sự hiểu biết sâu rộng hơn các khái niệm đã đọc qua và thấy được các ứng dụng rộng rãi của các kiến thức này vào thực tế.

Mục tiêu chúng của tôi khi viết giáo trình này:

- Dễ đọc, dễ hiểu, có thể tự học với sự hỗ trợ chút ít của giáo viên;

- Người đọc có thể nắm vững tất cả kiến thức môn học mà tốn ít thời gian nhất. Do đó, chúng tôi chọn cách trình bày hình thức đối với các khái niệm không phức tạp cho ngắn gọn đỡ mất thời gian; còn đối với các khái niệm phức tạp (chẳng hạn như không gian vectơ) chúng tôi chọn cách trình bày từ cụ thể, trực quan, trừu tượng dần để bảo đảm bạn đọc hiểu được.
- Đọc giáo trình như một hành trình khám phá tri thức và khả năng ứng dụng vào cuộc sống. Người đọc cảm thấy thích thú, hạnh phúc, tư duy logic cùng trí tưởng tượng và khả năng sáng tạo tăng lê rõ rệt.
- Người đọc biết ứng dụng những gì đã học làm công cụ để học tiếp các môn khác và biết ứng dụng vào thực tế.

Tuy có rất nhiều cố gắng trong công tác biên soạn , nhưng chắc chắn giáo trình này vẫn còn thiếu sót. Chúng tôi xin trân trọng tiếp thu ý kiến đóng góp của các bạn sinh viên và các đồng nghiệp để giáo trình này ngày càng hoàn chỉnh hơn.

Thư góp ý xin gửi về :

Ngô Hữu Tâm
Trường Đại học Sư Phạm Kỹ thuật TP. Hồ Chí Minh
Khoa Khoa học Cơ bản
Bộ môn Toán
Email: tamnh@hcmute.edu.vn
huutamngo@yahoo.com.vn

Chương 1

MA TRẬN - ĐỊNH THỨC

Chương này gồm các nội dung sau:

- Khái niệm ma trận, một số ma trận đặc biệt;
- Các phép toán ma trận, tính chất;
- Phép biến đổi sơ cấp hàng, ma trận tương đương hàng;
- Ma trận rút gọn bậc thang, hạng ma trận.
- Khái niệm và cách tính định thức;
- Các tính chất định thức;
- Hai cách thường sử dụng để tính định thức;
- Áp dụng định thức tìm hạng ma trận.
- Khái niệm ma trận khả nghịch và ma trận đảo của một ma trận vuông;
- Các tính chất ma trận khả nghịch;
- Điều kiện cần và đủ để một ma trận vuông khả nghịch;
- Hai cách cơ bản tìm ma trận đảo của một ma trận khả nghịch;
- Ứng dụng ma trận đảo để giải phương trình ma trận và hệ phương trình tuyến tính.

§1. MA TRẬN

Trong bài này, bạn sẽ học

- Khái niệm ma trận, một số ma trận đặc biệt;
- Các phép toán ma trận, tính chất;
- Phép biến đổi sơ cấp hàng, ma trận tương đương hàng;
- Ma trận rút gọn bậc thang, hạng ma trận;

1- Ma trận (matrices)

1.1 -Định nghĩa và ký hiệu (**K** = ℝ là tập số thực hoặc **K** = ℂ là tập số phức)

Một ma trận A cấp m×n (cỡ m×n, kích thước m×n) trên **K** là một bảng chữ nhật gồm m×n phần tử trong **K** được viết thành *m hàng* và *n cột* như sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{hay} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Trong đó $a_{ij} \in$ **K** là phần tử (số hạng) ở vị trí hàng thứ i và cột thứ j của ma trận A. Đôi khi ma trận A được ký hiệu vắn tắt là: $A = [a_{ij}]_{mxn} = (a_{ij})_{mxn} = A_{mxn}$.

Ký hiệu M_{mxn}(**K**) là tập hợp tất cả các ma trận cấp m×n trên **K**.

❖ Ma trận không (zero matrix) là ma trận mà tất cả các phần tử đều bằng 0, ký hiệu là 0_{mxn} (hay 0 nếu không có sự nhầm lẫn): $0_{mxn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = 0$

❖ Ma trận cột (column matrix) là ma trận chỉ có một cột : $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$

❖ Ma trận hàng (row matrix) là ma trận chỉ có một hàng: $A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \ldots\ldots \quad a_{1n})$.

❖ Ma trận có số hàng bằng số cột gọi là ***ma trận vuông*** (square matrix). Ma trận vuông có n hàng gọi là ma trận vuông cấp n: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = [a_{ij}]_{nxn}$.

Các phần tử $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ gọi là các phần tử chéo của ma trận vuông A. Vết ma trận vuông A, ký hiệu Tr(A), được định nghĩa như sau: $Tr(A) \overset{ĐN}{=} a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$

Ký hiệu $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ là tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp n trên $\mathbf{K}$.

❖ Ma trận vuông $A = [a_{ij}]_{nxn}$ gọi là ***ma trận tam giác trên*** nếu $a_{ij} = 0$ khi $i > j$, tức là nó có dạng: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

❖ Ma trận vuông $A = [a_{ij}]_{nxn}$ gọi là ***ma trận tam giác dưới*** nếu $a_{ij} = 0$ khi $j > i$, tức là nó có dạng: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

❖ Ma trận vuông D gọi là ***ma trận chéo*** nếu D vừa là ma trận tam giác trên vừa là ma trận tam giác dưới, tức là nó có dạng :

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{\text{kýhiệu}}{=} dg(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}).$$

❖ Ma trận chéo mà tất cả các phần tử chéo đều bằng 1 gọi là ***ma trận đơn vị***, ma trận đơn vị cấp n ký hiệu là $\mathbf{I}_n$ hay $\mathbf{I}$ khi không có sự nhầm lẫn: $\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$

Ví dụ 1.1

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5+2i \\ 6 & 7 & -9 \end{pmatrix}$ là ma trận cấp 2×3; $a_{11} = 3, a_{12} = -4, a_{13} = 5+2i, \cdots, a_{23} = -9$

b) $A=\begin{pmatrix}5 & 7 & -3\\ 2+i & -1 & 6\\ 8-3i & 9 & 12\end{pmatrix}$ là ma trận vuông cấp 3.

c) $C=\begin{pmatrix}5 & 7 & 3\\ 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 12\end{pmatrix}$ là ma trận tam giác trên; $C'=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 4 & -2 & 13\end{pmatrix}$ là ma trận tam giác dưới.

d) $D=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=dg(4,3,-1,2)$ là ma trận chéo cấp 4.

e) $0_{3\times 2}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $0_{2\times 3}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

1.2 - Các phép toán ma trận

1.2.1- Định nghĩa -Ví dụ minh họa

a) ***Ma trận bằng nhau***: Ma trận $A = [a_{ij}]_{mxn}$ gọi là bằng ma trận $B = [b_{ij}]_{mxn}$, ký hiệu A = B, nếu $a_{ij}=b_{ij}\ \forall i=\overline{1,m}$ và $j=\overline{1,n}$.

$$\boxed{A = B \overset{ĐN}{\Leftrightarrow} a_{ij} = b_{ij},\ \forall\ i = \overline{1, m} \text{ và } j = \overline{1,n}}$$

Ví dụ 1.2 Cho $A=\begin{pmatrix}x+1 & y-1\\ 2z & t-3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 6 & 4\end{pmatrix}$. Tìm x,y,z,t để $A=B$.

<u>Giải</u>

$$A=B\Leftrightarrow\begin{cases}x+1 & = & 7\\ y-1 & = & 3\\ 2z & = & 6\\ t-3 & = & 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x & = & 6\\ y & = & 4\\ z & = & 3\\ t & = & 7\end{cases}$$

b)***Phép cộng, trừ các ma trận cùng cấp***: Cho $A = [a_{ij}]_{mxn,}$, $B = [b_{ij}]_{mxn}$

$$\boxed{A + B \overset{ĐN}{=} [a_{ij} + b_{ij}]_{mxn} \quad ; \quad A - B \overset{ĐN}{=} [a_{ij} - b_{ij}]_{mxn}}$$

Tức là khi cộng, trừ hai ma trận cùng cấp chúng ta cộng, trừ các số hạng cùng vị trí với nhau.

c) ***Phép nhân một số với một ma trận***: Cho A = $[a_{ij}]_{mxn}$, $\alpha \in$ **K**

$$\boxed{\alpha A \overset{\text{ĐN}}{=} [\alpha a_{ij}]_{mxn}}$$

Tức là khi nhân một số với một ma trận chúng ta nhân số đó với tất cả các số của ma trận.

Ví dụ 1.3 Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Tính $A + B$, $2A + 3B$, $2A - 3B$.

<u>***Giải***</u>

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 0 \\ 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2A + 3B = 2\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 17 & 1 \\ 8 & 21 & 10 \end{pmatrix}$$

$$2A - 3B = 2\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -1 & -5 \\ -4 & -9 & -2 \end{pmatrix}$$

d) ***Phép nhân hai ma trận có cấp thích hợp***:(số cột ma trận trước phải bằng số hàng ma trận sau)

Cho các ma trận $A = [a_{ik}]_{m\times n}$, $B = [b_{kj}]_{n\times p}$

$$\boxed{AB \overset{\text{ĐN}}{=} \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}\right]_{mxp}}$$

Sơ đồ của phép nhân ma trận như sau:

$$\text{Hàng } i \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} . \underbrace{\begin{array}{c} \text{Cột } j \\ \downarrow \\ \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \end{array}}_{B} = \underbrace{\begin{array}{c} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj} \\ \text{Cột } j \\ \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \Box & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \end{array}}_{AB} \leftarrow \text{hàng } i$$

e) ***Phép lũy thừa ma trận vuông:*** Cho ma trận vuông A = $[a_{ij}]_{nxn}$

$$A^0 = I,\ A^1 = A,\ A^2 = AA, \ldots, A^k = A^{k-1}A = \underbrace{A.A..........A}_{\text{k-lần}}$$

Ví dụ 1.4 Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Tính AB, A^2, A^3; giải thích vì sao không tồn tại ma trận BA.

<u>Giải</u>

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+6 & 0-2 & 1+8 \\ -2+9 & 0-3 & -1+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 9 \\ 7 & -3 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 2+6 \\ -1-3 & -2+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2\,A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 22 \\ -11 & 13 \end{pmatrix}$$

Vì B có 3 cột và A có 2 hàng nên không tồn tại BA.

f) *Phép chuyển vị:* Ma trận chuyển vị của $A = [a_{ij}]_{mxn}$, ký hiệu A^T, là ma trận xác định bởi $A^T \overset{ĐN}{=} [a^T_{ji}]_{nxm}$ với $a^T_{ji} = a_{ij}$; tức là A^T có được từ A bằng cách chuyển hàng thành cột.

Ví dụ 1.5

a) Với $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ thì $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

b) Với $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 7 \\ 5 & 9 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ thì $B^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$.

1.2.2- Tính chất của các phép toán về ma trận

Với mọi ma trận A, B, C có cấp thích hợp để thực hiện được các phép toán và với mọi số $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$.

❶ $A + B = B + A$

❷ $A + (B + C) = (A + B) + C$

❸ $A_{mxn} + 0_{mxn} = A_{mxn}$

❹ $\alpha(A \pm B) = \alpha A \pm \alpha B$

$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

❺ $A(B + C) = AB + AC$

$(A + B)C = AC + BC$

❼ $A_{mxn}.0_{nxp} = 0_{mxp} = 0_{mxk}.A_{kxp}$

❽ $0A_{mxn} = 0_{mxn}$, $\alpha 0_{mxn} = 0_{mxn}$

❾ $(AB)C = A(BC) = ABC$

❿ $(A + B)^T = A^T + B^T$, $(AB)^T = B^T A^T$

$(ABC)^T = C^T B^T A^T$

11 $I_m A_{mxn} = A_{mxn} = A_{mxn} I_n$.

12 Nếu $A = [a_{ij}]_{nxn}$ thì $AI_n = A = I_n A$

❻ $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \beta(\alpha A)$

$\alpha(AB) = A(\alpha B) = (\alpha A)B$

✻ **Chú ý** *Phép nhân ma trận không có tính chất giao hoán.*

Ví dụ 1.6

a) Cho $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 6 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$. Tính $(3A-2B)C$, C^TA^T.

b) Cho $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ và f(x) = $3x^2 + 2x - 4$. Tính $f(A)$.

<u>Giải</u>

a) $AC=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 6 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 5\\ 25 & 9\end{pmatrix}$; $BC=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 14 & 6\end{pmatrix}$

$$(3A-2B)C = 3AC-2BC = 3\begin{pmatrix}11 & 5\\ 25 & 9\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 14 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}39 & 13\\ 47 & 15\end{pmatrix}$$

$$C^TA^T = (AC)^T=\begin{pmatrix}11 & 25\\ 5 & 9\end{pmatrix}$$

b) $A^2 = AA=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3 & 5\\ 3 & 5 & 4\\ 5 & 4 & 4\end{pmatrix}$

$$f(A)= 3A^2+2A-4I = 3\begin{pmatrix}6 & 3 & 5\\ 3 & 5 & 4\\ 5 & 4 & 4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & 13 & 17\\ 13 & 11 & 14\\ 17 & 14 & 12\end{pmatrix}.$$

1.3 - Phép biến đổi sơ cấp hàng – Hạng của ma trận

1.3.1 - Định nghĩa

Có 3 loại phép ***biến đổi sơ cấp hàng*** (elementary rows operations)

<u>Loại 1</u> Hoán vị hai hàng : $h_i \leftrightarrow h_j$

<u>Loại 2</u> Nhân một số khác 0 vào một hàng : $\alpha h_i \to h_i$, $\alpha \neq 0$

<u>Loại 3</u> Thay một hàng bởi hàng đó cộng với α lần hàng khác

$$h_i + \alpha h_j \to h_i\ ,\ i \neq j.$$

Kết hợp loại 2 và loại 3 ta được : $\alpha h_i + \beta h_j \to h_i$, $\alpha \neq 0$, $i \neq j$.

1.3.2 -Ma trận tương đương hàng

Nếu từ ma trận $A \to \underset{\text{cấp hàng}}{\overset{\text{biến đổi sơ}}{\cdots\cdots\cdots}} \to B$ thì ma trận A gọi là tương đương hàng với ma trận B , ký hiệu $A \sim B$.

Vậy : $A \sim B \overset{\text{ĐN}}{\Leftrightarrow} A \to \underset{\text{cấp hàng}}{\overset{\text{biến đổi sơ}}{\cdots\cdots\cdots}} \to B.$

Ví dụ 1.7 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_1 \leftrightarrow h_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \xrightarrow{h_3 - 2h_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix}}_{C}$

$$\xrightarrow{h_3 - 6h_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -17 \end{pmatrix} = D$$

Khi đó, $A \sim B$, $A \sim C$, $A \sim D$, $B \sim C$,....

1.3.3- Ma trận rút gọn bậc thang

Ma trận $A_r = [a_{ij}]_{mxn}$ gọi là ma trận ***rút gọn bậc thang*** nếu nó thỏa đồng thời **3** tính chất sau:

❶- Các số phía dưới *số khác 0 đầu tiên* trên mỗi hàng đều bằng 0.

❷- Các số khác 0 đầu tiên trên mỗi hàng xếp theo thứ tự bậc thang từ trên xuống dưới và từ trái sang phải.

❸ - Các hàng zêro nằm phía dưới các hàng khác zêro (hàng zêro là hàng mà tất cả các số hạng đều bằng 0).

Ví dụ 1.8

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -17 \\ 0 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ là ma trận rút gọn bậc thang.

b) $B=\begin{pmatrix}5&0&9&7\\0&6&4&3\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ là ma trận rút gọn bậc thang.

c) $C=\begin{pmatrix}2&3&1&8\\0&0&7&9\\0&5&0&6\end{pmatrix}$ không là ma trận rút gọn bậc thang vì không thỏa tính chất ❷.

1.3.4 -Hạng ma trận

Hạng ma trận A = $[a_{ij}]_{mxn}$, ký hiệu là $r(A)$, là một số xác định như sau

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Từ ma trận A} \to \underset{\text{cấp hàng}}{\overset{\text{Biến đổi sơ}}{\ldots\ldots\ldots\ldots}} \to \text{A}_r\\ \text{với A}_r \text{ là ma trận rút gọn bậc thang}\end{array}\right\} \text{ thì } r(A) = \text{số hàng khác zêro của A}_r$$

Ví dụ 1.9

a) Ma trận $A=\begin{pmatrix}2&3&1&8\\0&0&-1&9\\0&3&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{h_2\leftrightarrow h_3}\begin{pmatrix}2&3&1&8\\0&3&0&2\\0&0&-1&9\end{pmatrix}=A_r$

Suy ra $r(A)=3$.

b) Ma trận $B=\begin{pmatrix}1&3&1&2\\1&3&0&10\\2&6&1&12\end{pmatrix}\xrightarrow[h_3-2h_1]{h_2-h_1}\begin{pmatrix}1&3&1&2\\0&0&-1&8\\0&0&-1&8\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{h_3-h_2}\begin{pmatrix}1&3&1&2\\0&0&-1&8\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B_r$$

Suy ra $r(B)=2$.

Ví dụ 1.10 Với m là tham số, hãy tìm hạng của ma trận sau:

a) A = $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\\4&5&m\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}1&1&m&m^2\\1&m&1&m\\m&1&1&1\end{pmatrix}$

<u>Giải</u>

a) Ta có

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & m \end{pmatrix} \xrightarrow[h_4-4h_1]{h_2-2h_1;\, h_3-3h_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & m-12 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_4-3h_2]{h_3-2h_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m-6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_3 \leftrightarrow h_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & m-6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_r. \text{ Suy ra } r(A) = \begin{cases} 2 & \text{khi } m=6 \\ 3 & \text{khi } m \neq 6 \end{cases}.$$

b)

$$A \underset{h_3-mh_1}{\overset{h_2-h_1}{\rightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & m-1 & 1-m & m-m^2 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1-m^3 \end{pmatrix} \overset{h_3+h_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & m-1 & 1-m & m-m^2 \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 & 1+m-m^2-m^3 \end{pmatrix} = A_r$$

Khi $m=1$ thì $A_r = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nên $r(A)=1$.

Khi $m \neq 1$ thì A_r có 3 hàng khác zêro nên $r(A)=3$.

✻ Tính chất

i) $r(A) = r(A^T) =$. Suy ra khi tìm hạng ma trận có thể biến đổi sơ cấp cột.

ii) Nếu $A \sim B$ thì $r(A) = r(B)$.

iii) Nếu $A = [a_{ij}]_{mxn}$ thì $r(A) \leq \min\{m,n\}$.

Ví dụ 1.12 Tìm hạng ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \\ 7 & 9 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Giải

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 6 \\ -2 & 5 & 9 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_2+2h_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 9 & 23 & 17 \end{pmatrix} = A_r^T$$

$r(A) = r(A^T) =$ số hàng khác zêro của A_r^T = 2.

§2. ĐỊNH THỨC

Trong bài này, bạn sẽ học

- Định nghĩa và cách tính định thức;
- Các tính chất định thức;
- Hai cách thường sử dụng để tính định thức;
- Áp dụng định thức tìm hạng ma trận.

2.1-Định nghĩa - Cách tính

Ký hiệu định thức của ma trận vuông $A = [a_{ij}]_{nxn}$ là detA hay |A|.

* Định thức cấp 1: Với $A = (a_{11})$ thì $\det A = a_{11}$.

* Định thức cấp 2: $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

* Định thức cấp 3: $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})$

$$-(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}).$$

Quy tắc đường chéo

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = (a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})-(a_{31}a_{22}a_{13}+a_{32}a_{23}a_{11}+ a_{33}a_{21}a_{12}).$$

* ***Định thức cấp n*** $(n \geq 2)$

$$\boxed{\det A = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}|M_{ij}|}_{\text{Khai triển hàng i}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}|M_{ij}|}_{\text{Khai triển cột j}}}$$

, với $|M_{ij}|$ là định thức cấp (n-1) có từ A bằng cách bỏ hàng i và cột j và $(-1)^{i+j}|M_{ij}|$ gọi là phần phụ đại số của a_{ij}.

Ví dụ 1.12 Tính các định thức: **a)** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

<u>***Giải***</u>

a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (6+0-1)-(3+4+0) = -2$

b) Khai triển định thức theo cột 1

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3[(-4+9+0)-(6+0+12)] + 2(-2) = -39 - 4 = -43.$$

2.2- Tính chất của định thức

❶ $\det A = \det A^T$. Suy ra mọi tính chất của định thức nếu đã đúng với hàng thì cũng đúng với cột và ngược lại. Do đó các tính chất tiếp theo sau đây ta chỉ cần phát biểu đối với hàng.

❷ $\det(AB) = \det A \det B$.

❸ Hoán vị hai hàng (cột) thì định thức đổi dấu. Tức là,

$$\text{nếu } |A| \xrightarrow{h_i \leftrightarrow h_j} |B| \text{ thì } |A| = -|B|$$

$$(\text{hoặc viết gọn } |A| \overset{h_i \leftrightarrow h_j}{=} -|B|)$$

Vậy nếu định thức có hai hàng (cột) giống nhau thì định thức bằng 0.

❹ Nếu nhân một hàng (cột) của định thức với một số $\alpha \neq 0$ thì định thức tăng lên α lần. Tức là,

$$\text{nếu } |A| \xrightarrow{\alpha h_i \to h_i} |B| \text{ thì } |A| = \frac{1}{\alpha}|B|, \ \alpha \neq 0$$

$$(\text{hoặc viết gọn } |A| \overset{\alpha h_i}{=} \frac{1}{\alpha}|B|, \alpha \neq 0)$$

Vậy thừa số chung của một hàng (cột) có thể đặt ra ngoài dấu định thức.

❺ Khi thực hiện phép biến đổi sơ cấp loại 3 trên hàng hay cột thì định thức không đổi. Tức là,

$$\text{nếu } |A| \xrightarrow{h_i \pm \alpha h_j \to h_i} |B| \text{ thì } |A| = |B|$$

$$(\text{hoặc viết gọn } |A| \overset{h_i \pm \alpha h_j}{=} |B|, i \neq j)$$

❻ Nếu định thức có hai hàng (cột) tỷ lệ thì định thức bằng 0.

❼ Nếu định thức có một hàng(cột) zero thì định thức bằng 0 (hàng zêro là hàng mà các số hạng đều bằng 0).

❽ Nếu mỗi số hạng ở một hàng của detA là tổng của hai số thì detA bằng tổng hai định thức: Định thức thứ nhất suy từ A bằng cách thay mỗi số hạng ở hàng nói trên nói trên bởi một trong hai số hạng của nó. Định thức thứ hai có được bằng cách thay số hạng còn lại:

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

❾ Định thức ma trận tam giác (tam giác trên , tam giác dưới) bằng tích các số trên đường chéo.

Thông thường, khi tính định thức chúng ta làm như sau:

Cách 1 Áp dụng các tính chất định thức để biến đổi định thức có một hàng hoặc một cột thật nhiều số 0 rồi khai triển định thức theo hàng hoặc cột đó.

Cách 2 Áp dụng các tính chất định thức để biến đổi định thức về dạng định thức ma trận tam giác. Khi đó, định thức bằng tích các số trên đường chéo.

Ví dụ 1.13 Tính các định thức sau

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & a' & b & a'b \\ 1 & a & b' & ab' \\ 1 & a' & b' & a'b' \end{vmatrix}$

Giải

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$ vì cột 1 và cột 3 tỷ lệ.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} \overset{h_2-h_1;h_3-2h_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{h_4-h_1;h_3-h_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{h_3-h_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{h_4-h_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -15.$

d) $\begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & a' & b & a'b \\ 1 & a & b' & ab' \\ 1 & a' & b' & a'b' \end{vmatrix} \underset{h_2-h_1}{\overset{h_4-h_2,h_3-h_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 0 & a'-a & 0 & b(a'-a) \\ 0 & 0 & b'-b & a(b'-b) \\ 0 & 0 & b'-b & a'(b'-b) \end{vmatrix} \overset{h_4-h_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 0 & a'-a & 0 & b(a'-a) \\ 0 & 0 & b'-b & a(b'-b) \\ 0 & 0 & 0 & (b'-b)(a'-a) \end{vmatrix}$

$$= (a'-a)^2(b'-b)^2$$

2.3-Áp dụng định thức để tìm hạng ma trận Cho A = $[a_{ij}]_{mxn}$

i) Từ ma trận A ta chọn ra k hàng và k cột tùy ý, với k hàng và k cột vừa chọn ra ta lập được một định thức cấp k, định thức này gọi là *định thức con cấp k* của A.

ii) $r(A)$ = cấp cao nhất của các định thức con khác 0 của A.

Ví dụ 1.14 Áp dụng định thức tìm hạng ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

<u>Giải</u>

Xét các định thức con cấp 3 của A:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Suy ra, $r(A) < 3$.

Xét tiếp định thức con cấp 2 của A: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$

Suy ra, $r(A) = 2$.

Ví dụ 1.15 Áp dụng định thức tìm hạng ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

<u>Giải</u>

Xét các định thức con cấp 3 của A: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$

Suy ra, $r(A) = 3$.

§3. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

Trong bài này, bạn sẽ học

- Khái niệm ma trận khả nghịch và ma trận đảo của một ma trận vuông;
- Các tính chất ma trận khả nghịch;
- Điều kiện cần và đủ để một ma trận vuông khả nghịch;
- Hai cách cơ bản tìm ma trận đảo của một ma trận khả nghịch;
- Ứng dụng ma trận đảo để giải phương trình ma trận và hệ phương trình tuyến tính.

3.1. Định nghĩa

Ma trận vuông $A = [a_{ij}]_{nxn}$ gọi là ***khả nghịch*** nếu có ma trận $B = [b_{ij}]_{nxn}$ sao cho

$$AB = I_n = BA$$

Khi đó B gọi là ***ma trận nghịch đảo*** hay ***ma trận đảo*** của A, ký hiệu là A^{-1}.

Vậy A khả nghịch khi và chỉ khi tồn tại A^{-1} và $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$

Ví dụ 1.16 Với $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Ta có

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = BA$$

Vậy A khả nghịch và $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = B$; B khả nghịch và $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A$.

<u>Lưu ý</u> Với $A = [a_{ij}]_{nxn}$, $B = [b_{ij}]_{nxn}$: $AB = I_n$ khi và chỉ khi $BA = I_n$.

3.2. Tính chất

❶ Ma trận đảo của ma trận A (nếu có) thì duy nhất và $(A^{-1})^{-1} = A$

❷ Nếu A khả nghịch thì A^T cũng khả nghịch và $\boxed{(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T}$

❸ Nếu $A = [a_{ij}]_{nxn}$, $B = [b_{ij}]_{nxn}$, $C = [c_{ij}]_{nxn}$ khả nghịch thì tích AB, ABC cũng khả nghịch và

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \ ; (ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}}$$

3.3 .Định lý (điều kiện để một ma trận vuông khả nghịch) Cho $A = [a_{ij}]_{nxn}$. Ta có :

① A khả nghịch $\Leftrightarrow A \sim I_n$

② A khả nghịch $\Leftrightarrow r(A) = n$

③ A khả nghịch $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

③bis A không khả nghịch $\Leftrightarrow \det A = 0$

Ví dụ 1.17 Biện luận theo tham số m tính khả nghịch ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & m-3 \end{pmatrix}$.

<u>Giải</u>

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & m-3 \end{vmatrix} = 7 - m$$

Khi $m = 7$ thì $\det A = 0$ nên A không khả nghịch.

Khi $m \neq 7$ thì $\det A \neq 0$ nên A khả nghịch.

3.4 . Cách tìm ma trận đảo và ứng dụng giải phương trình ma trận

**** Cách 1-Phương pháp Gauss- Jordan***

Nếu A khả nghịch thì dãy các phép biến đổi sơ cấp hàng biến A thành I_n cũng đồng thời biến I_n thành A^{-1}. Tức là,

$$\boxed{(A\,|I_n) \rightarrow \underset{\text{cấp hàng}}{\overset{\text{Biến đổi sơ}}{\cdots\cdots\cdots}} \rightarrow (I_n|\,A^{-1})}$$

****Cách 2-Phương pháp định thức***

Nếu A khả nghịch thì

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} P_A^T$, $P_A^T = [p_{ij}]_{nxn}$, $p_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$; với $|M_{ij}|$ là định thức cấp (n-1) có từ A bằng cách bỏ đi hàng i cột j. Ma trận $P_A = [p_{ij}]_{nxn}$ gọi là ma trận phụ hợp của A.

Ví dụ 1.18 Tìm ma trận X thỏa: $X\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Giải

$$X\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}}_{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 5 & 6\end{pmatrix}\Leftrightarrow XA=B$$

Áp dụng phương pháp Gauss-Jordan:

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{h_2-h_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_3-h_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{h_2-h_3\\(-1)h_3}]{h_1+h_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1\end{array}\right)$$

Suy ra A khả nghịch và $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -2 & 2 & -1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

$$XA=B\Leftrightarrow X=BA^{-1}\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -2 & 2 & -1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 7 & -4\\ -12 & 14 & -9\end{pmatrix}$$

Vậy $X=\begin{pmatrix}-6 & 7 & -4\\ -12 & 14 & -9\end{pmatrix}$.

Ví dụ 1.19 Tìm ma trận X thỏa: $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 7 & 3\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$

Giải

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 7 & 3\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2 & 1\\ 7 & 3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$