BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐÔNG Á

ThS. NGUYỄN HỒNG NHUNG

GIÁO TRÌNH
TOÁN ỨNG DỤNG

LƯU HÀNH NỘI BỘ

Đà Nẵng, 2013

CHƯƠNG I HÀM MỘT BIẾN

1 Hàm số một biến số

1.1 Khái niệm hàm số

1.1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1. Cho $X \subset \mathbb{R}, X \neq \varnothing$. Một *hàm số* f từ X vào $\mathbb{R}$ là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một và chỉ một số thực y.

Kí hiệu

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y \end{aligned}$$

hay $y = f(x)$với $x \in X$.

Số x được gọi là *biến số độc lập* và $y = f(x)$ được gọi là *giá trị* của hàm số f tại x.

Tập X được gọi là *tập xác định* của hàm f.

Đặt $Y = f(X)$ với $f(X) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x), x \in X\}$. Khi đó Y được gọi là *tập giá trị* của hàm f.

Đồ thị của hàm f là tập hợp tất cả các điểm $M(x, f(x))$ $(x \in X)$ trong mặt phẳng tọa độ Đềcác vuông góc Oxy.

***Ví dụ* 1.** Cho hàm số $f(x) = x^3 + 1$. Tìm $f(1), f(-2)$.

Giải.

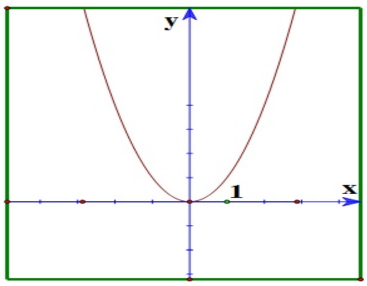
$f(1) = 1^3 + 1 = 2$; $f(-2) = (-2)^3 + 1 = -7$

***Ví dụ* 2.**

Hàm số

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

có tập xác định là $\mathbb{R}$, tập giá trị là $[0; +\infty)$.



Hình 1: $y = x^2$

1.2 Hàm số đơn điệu - Hàm số bị chặn - Hàm số chẵn, hàm số lẻ - Hàm số tuần hoàn

1.2.1 Hàm số đơn điệu

Định nghĩa 2.

i) Ta nói hàm số $f(x)$ gọi là tăng (giảm) trong khoảng (a,b) nếu:

$$\forall x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)(f(x_1) \geq f(x_2)).$$

ii) Hàm $f(x)$ được gọi là tăng ngặt (giảm ngặt) trong khoảng (a,b) nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)(f(x_1) > f(x_2)).$$

iii) Hàm số tăng (ngặt) hay giảm (ngặt) được gọi chung là hàm đơn điệu (ngặt).

Đồ thị của hàm số tăng là một đường đi lên từ trái sang phải.

Đồ thị của hàm số giảm là một đường đi xuống từ trái sang phải.

Ví dụ 3.

1) Hàm $y = \sin x$ tăng ngặt trên $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Hàm $y = \cos x$ giảm ngặt trên $[0, \pi]$.

2) Hàm $y = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{nếu } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ không tăng cũng không giảm trên $\mathbb{R}$.

1.2.2 Hàm số bị chặn

Định nghĩa 3.

i) Hàm số f được gọi là *bị chặn trên* trên tập $D \subset \mathbb{R}$ nếu tồn tại số M sao cho $f(x) \leq M, \forall x \in D$.

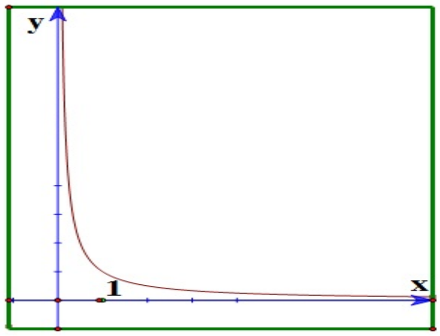
ii) Hàm f được gọi là *bị chặn dưới* trên tập $D \subset \mathbb{R}$ nếu tồn tại một số m sao cho $f(x) \geq m, \forall x \in D$.

iii) Hàm f vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới trên D được gọi là *bị chặn* trên D.

Ví dụ 4.

Ta có: $\dfrac{1}{x} > 0, \forall x \in (0, +\infty)$.

Vậy trên $(0, +\infty)$, hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ bị chặn dưới nhưng không bị chặn trên.



Hình 2: $y = \dfrac{1}{x}$

1.2.3 Hàm số chẵn - hàm số lẻ

Định nghĩa 4.

Hàm số $f(x)$ xác định trên tập X đối xứng (tức là nếu $x \in X$ thì $-x \in X$)

Hàm f được gọi là chẵn nếu $f(-x) = f(x),\ \forall x \in X$.

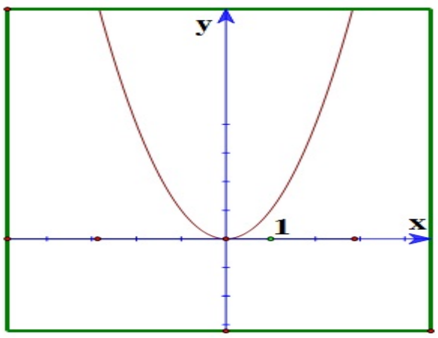
Hàm f được gọi là lẻ nếu $f(-x) = -f(x),\ \forall x \in X$.

Đồ thị hàm số chẵn đối xứng qua truc Oy. Đồ thị hàm số lẻ đối xứng qua gốc tọa độ O.

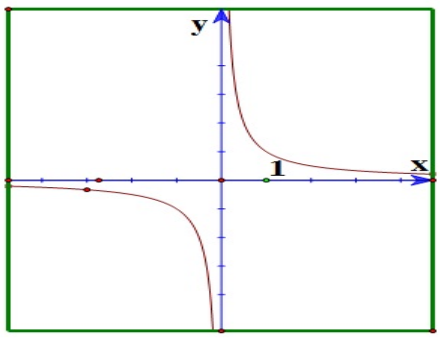
***Ví dụ* 5.**

1) Hàm số $y = x^2$ là hàm số chẵn.

2) Hàm số $y = \dfrac{1}{x}$ là hàm số lẻ.



Hình 3: $y = x^2$



Hình 4: $y = \dfrac{1}{x}$

1.2.4 Hàm số tuần hoàn

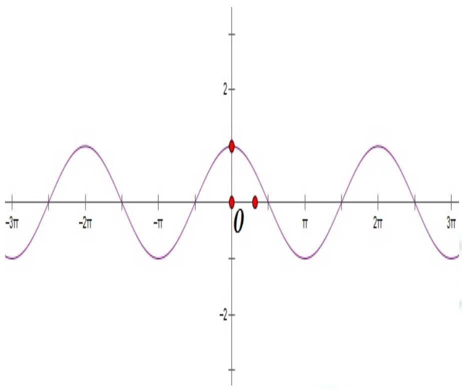
Định nghĩa 5. Hàm số $f(x)$ xác định trên tập X được gọi là tuần hoàn nếu tồn tại số t thỏa mãn: $\forall x \in X$ thì $x + t \in X$ và $f(x + t) = f(x)$.

Số T dương, nhỏ nhất thỏa mãn đẳng thức trên gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn.

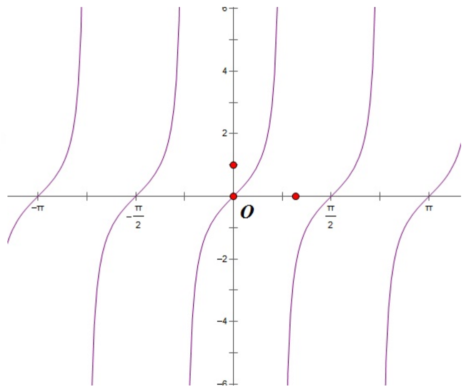
Ví dụ 6.

1)Hàm số $y = \cos x$ xác định $\forall x \in R$ và tuần hoàn với chu kì 2π.

2) Hàm số $y = \tan 2x$ xác định trên tập $D = R \setminus \{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\}$ và tuần hoàn với chu kì $\frac{\pi}{2}$.



Hình 5: $y = \cos x$



Hình 6: $y = tan2x$

1.3 Hàm số hợp - Hàm số ngược

1.3.1 Hàm số hợp

Định nghĩa 6. Cho hai hàm số $f(x)$ xác định trên tập X, $g(x)$ xác định trên tập Y sao cho $f(X) \subset Y$ (tập xác định của g chứa tập giá trị của f).

Hàm hợp của f và g là một hàm, kí hiệu $F = gof$;

$$F(x) = gof(x) = g(f(x)), \forall x \in X.$$

Ví dụ 7.

Cho hai hàm $f(x) = x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $g(x) = \cos x, x \in [0, 2\pi]$.

Khi đó hàm hợp là $f[g(x)] = \cos^2(x) + 1,\ x \in [0, 2\pi]$.

1.3.2 Hàm số ngược

Bây giờ, giả sử f là một hàm xác định trên D và đơn điệu ngặt trên D. Khi đó, với bất kỳ $y \in D' = f(D)$ ta xác định được duy nhất một $x \in D$ sao cho $f(x) = y$.

Từ đó ta có khái niệm về hàm ngược như sau:

Định nghĩa 7. Cho là một hàm xác định trên D, đơn điệu ngặt trên D và có tập giá trị là D' ($D' = f(D)$). Hàm ngược của hàm f là một hàm (ký hiệu f^{-1}) có tập xác định là D', tập giá trị là D và được xác định bởi

$$f^{-1} : D' \longrightarrow D$$

$$y \longmapsto x$$

với $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ với mọi $y \in D'$.

Đồ thị của hai hàm số f và f^{-1} đối xứng với nhau qua đường phân giác thứ nhất.

1.3.3 Cách tìm hàm ngược của hàm f

Bước 1: Viết $y = f(x)$.

Bước 2: Giải phương trình này cho x theo y (nếu có thể).

Bước 3: Biểu diễn f^{-1} như hàm số theo x bằng cách đổi x thành y và y thành x. Phương trình kết quả là $y = f^{-1}(x)$.

***Ví dụ* 8.** Tìm hàm ngược của hàm $f(x) = x^3 + 2,\ x \in \mathbb{R}$.
Giải:

Ta có

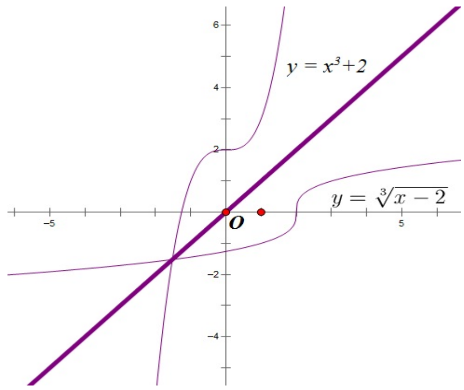
$$y = x^3 + 2 \Leftrightarrow x^3 = y - 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y-2}.$$

Đổi x thành y và y thành x ta được:

$$y = \sqrt[3]{x-2}$$

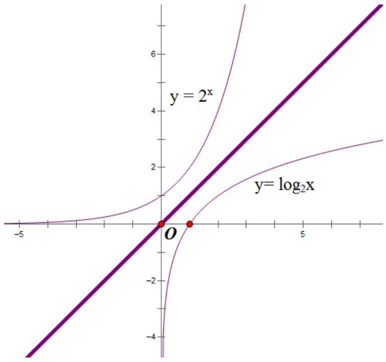
Vậy hàm ngược của hàm f là

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2},\ x \in \mathbb{R}$$



Hình 7: $y = x^3 + 2$

***Ví dụ* 9.** Hàm số $y = 2^x, x \in \mathbb{R}$ có hàm số ngược là $y = \log_2 x$ xác định trên khoảng $(0, +\infty)$.



Hình 8: $y = 2^x$ và $y = \log_2 x$

2 Hàm số sơ cấp

2.1 Các hàm số sơ cấp cơ bản

Các hàm số sau đây được gọi là các hàm số sơ cấp cơ bản:

1. Hàm số lũy thừa: $x \mapsto x^\alpha, \alpha \in R$;

2. Hàm số lũy mũ: $x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$;

3. Hàm số logarit: $x \mapsto \log_a x, a > 0, a \neq 1$;

4. Các hàm số lượng giác: $x \mapsto \sin x, x \mapsto \cos x, x \mapsto \tan x, x \mapsto \cot x$

5. Các hàm số lượng giác ngược: $x \mapsto \arcsin x, x \mapsto \arccos x, x \mapsto \arctan x, x \mapsto \mathrm{arccot} x$

2.2 Hàm số sơ cấp

Hàm số sơ cấp là những hàm số được tạo thành bởi một số hữu hạn các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia), các phép lấy hàm số hợp đối với các hàm số sơ cấp cơ bản và các hằng số.

3 Giới hạn của hàm số

3.1 Các định nghĩa giới hạn

3.1.1 Lân cận

Cho điểm $x_0 \in \mathbb{R}$, và $\delta > 0$. Khi đó ta nói:

Khoảng $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, là $\delta-$ lân cận của điểm x_0.

Khoảng $(x_0 - \delta, x_0)$, là $\delta-$ lân cận trái của điểm x_0.

Khoảng $(x_0, x_0 + \delta)$, là $\delta-$ lân cận phải của điểm x_0.

Tập hợp U chứa một $\delta-$lân cận của x_0 được gọi là một lân cận của x_0, thường ký hiệu là $U(x_0)$.

3.1.2 Định nghĩa

Định nghĩa 8.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trong lân cận $U(x_0)$ (có thể trừ x_0). Số L được gọi là giới hạn của hàm số $f(x)$ khi x dần tới (x_0) nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ cho trước nhỏ tùy ý luôn tồn tại số $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in U(x_0)$, $0 < |x - x_0| < \delta$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

***Ví dụ* 10.** Dùng định nghĩa để chứng minh rằng: $\lim\limits_{x \to 2}(3x + 4) = 10$.

Ta có: $|(3x+4) - 10| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x - 6| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$, ta chọn $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}(> 0)$ ta có: nếu $0 < |x - 2| < \delta$ thì $|(3x + 4) - 10| < \varepsilon$.

Vậy $\lim\limits_{x \to 2}(3x + 4) = 10$.

Định nghĩa 9. (*Giới hạn một phía*)

a) Cho hàm số $f(x)$ xác định trong nửa khoảng $(a, x_0]$, có thể trừ x_0, số L_1 được gọi là giới hạn trái của hàm $f(x)$ khi x dần đến $x_0(x < x_0)$ nếu với mỗi ε cho trước nhỏ tùy ý luôn tồn tại số $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in (a, x_0]$, $0 < x_0 - x < \delta$ thì $|f(x) - L_1| < \varepsilon$.

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L_1$ hoặc $f(x) \to L_1$ khi $x \to x_0^-$.

b) Cho hàm số $f(x)$ xác định trong nửa khoảng $[x_0, b)$, có thể trừ x_0, số L_2 được gọi là giới hạn trái của hàm $f(x)$ khi x dần đến $x_0(x > x_0)$nếu với mỗi ε cho trước nhỏ tùy ý luôn tồn tại số $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in [x_0, b)$, $0 < x - x_0 < \delta$ thì $|f(x) - L_2| < \varepsilon$.

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L_2$ hoặc $f(x) \to L_2$ khi $x \to x_0^+$.

Định lý 3.1. Điều kiện cần và đủ để tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ là $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ đều tồn tại và

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L.$$

Định nghĩa 10. (*Giới hạn ở vô tận*)

Cho hàm số $f(x)$ xác định tại mọi x có $|x|$ lớn tùy ý.

a)Số L được gọi là giới hạn của $f(x)$ khi x dần tới dương vô cùng ($x \to +\infty$) nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ cho trước nhỏ tùy ý, tồn tại số $M > 0$ khá lớn sao cho khi $x > M$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

b) Số L được gọi là giới hạn của $f(x)$ khi x dần tới âm vô cùng ($x \to -\infty$) nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ cho trước nhỏ tùy ý, tồn tại số $M > 0$ khá lớn sao cho khi $x < -M$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$.

Định nghĩa 11. (*Giới hạn vô tận*)

Cho hàm số $f(x)$ xác định trong một lân cận $U(x_0)$

a) Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x \to x_0$ nếu với mỗi số $A > 0$ lớn tùy ý luôn tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in U(x_0),\ 0 < |x - x_0| < \delta$ thì $f(x) > A$.

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

b) Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là $-\infty$ khi $x \to x_0$ nếu với mỗi số $A > 0$ lớn tùy ý luôn tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in U(x_0),\ 0 < |x - x_0| < \delta$ thì $f(x) < -A$.

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

***Ví dụ* 11.** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

3.2 Giới hạn của các hàm số sơ cấp cơ bản

Để thực hiện việc tính giới hạn của hàm số, ta cần ghi nhớ một số công thức dưới đây:

1) Hàm số lũy thừa:

$$* \lim_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty, & \text{nếu } \alpha > 0, \\ 0, & \text{nếu } \alpha < 0. \end{cases}$$

$$* \lim_{x \to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0, & \text{nếu } \alpha > 0, \\ +\infty, & \text{nếu } \alpha < 0. \end{cases}$$

2) Hàm số mũ:

$$* \lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{nếu } a > 1, \\ +\infty, & \text{nếu } 0 < a < 1. \end{cases}$$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & \text{nếu } a > 1, \\ 0, & \text{nếu } 0 < a < 1. \end{cases}$

3) Hàm số logarit:

* $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & \text{nếu } a > 1, \\ +\infty, & \text{nếu } 0 < a < 1. \end{cases}$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & \text{nếu } a > 1, \\ -\infty, & \text{nếu } 0 < a < 1. \end{cases}$

4) Các hàm lượng giác:

Các hàm số $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$ không có giới hạn khi $x \to -\infty, x \to +\infty$.

* $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\pi)^-} \tan x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\pi)^+} \tan x = -\infty$; $k \in \mathbb{Z}$

* $\lim\limits_{x\to(k\pi)^+} \cot x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to(k\pi)^-} \cot x = -\infty$; $k \in \mathbb{Z}$

5) Các hàm lượng giác ngược:

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$.

3.3 Các tính chất của giới hạn

Định lý 3.2. Giả sử $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ và $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$. Khi đó ta có:

a) $\lim\limits_{x\to a} C.f(x) = C.\lim\limits_{x\to a} f(x) = C.L_1$*; với C là hằng số;*

b) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2$*;*

c) $\lim\limits_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x).\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_1.L_2$*;*

d) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ nếu $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2 \neq 0$.

Nhận xét:

Trường hợp (b): Khi $L_1 = +\infty$ và $L_2 = -\infty$ thì về mặt hình thức ta có dạng $\infty - \infty$, đó là một dạng vô định (nghĩa lad chưa khẳng định được $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ có hay không.

Trường hợp (c): Khi $L_1 = 0$ và $L_2 = \infty$ thì về mặt hình thức ta có dạng $0.\infty$, đó là một dạng vô định.

Trường hợp (d): Khi $L_1 = 0(\infty)$ và $L_2 = 0(\infty)$ thì về mặt hình thức ta có dạng $\dfrac{0}{0}$ hoặc $\dfrac{\infty}{\infty}$, đó là một dạng vô định.

Khi gặp các dạng vô định đó, muốn tính giới hạn tùy từng trường hợp phải tìm cách để khử dạng vô định.

***Ví dụ* 12.** Xét $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

Có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$. Nhân liên hiệp tử và mẫu với $\sqrt{1+x}+1$, ta được

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\dfrac{1}{2}$

Định lý 3.3. Cho hàm hợp $f\circ u : x\mapsto (f\circ u)(x)=f[u(x)]$.

Nếu ta có $\lim\limits_{x\to a}u(x)=u_0$, $f(u)$ xác định trong lân cận u_0 (có thể trừ u_0) và có $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$ thì $\lim\limits_{x\to a}f[u(x)]=A$.

Định lý 3.4. Giả sử $f(x), g(x), h(x)$ là những hàm số cùng xác định trong lân cận $U(x_0)$ (có thể trừ x_0) và trong lân cận đó có $f(x)\le g(x)\le h(x)$. Khi đó nếu $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=L$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=L$.

***Ví dụ* 13.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

***Ví dụ* 14.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$.

3.4 Vô cùng bé - Vô cùng lớn

3.4.1 Vô cùng bé

Định nghĩa 12. Hàm số $f(x)$ được gọi là một vô cùng bé, viết tắt là VCB khi $x\to x_0$ nếu: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

***Ví dụ* 15.** Khi $x\to 0$ thì $\sin x$ là 1 VCB, x cũng là 1 VCB.

Các tính chất của VCB

i) Nếu $f(x)$ là VCB khi $x\to x_0$ thì $C.f(x)$ (C: hằng số) cũng là VCB khi $x\to x_0$.

ii) Các định lí về tổng, tích, thương các VCB được suy trực tiếp từ đinh lí tổng, tích, thương các đại lượng có giới hạn .

So sánh các VCB

Cho $f_1(x)$ và $f_2(x)$ là 2 VCB khi $x\to x_0$. Khi đó:

i) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=0$ thì ta nói rằng $f_1(x)$ có bậc cao hơn $f_2(x)$, kí hiệu: $f_1(x)=o(f_2(x)), x\to x_0$.

ii) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = C, C \neq 0$ thì ta nói rằng $f_1(x)$ cùng bậc với $f_2(x)$, kí hiệu: $f_1(x) = O(f_2(x)), x \to x_0$.

Đặc biệt nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1$ thì ta nói rằng $f_1(x)$ tương đương với $f_2(x)$ khi $x \to x_0$, kí hiệu: $f_1(x) \sim f_2(x), x \to x_0$.

***Ví dụ* 16.**

Khi $x \to 0$ thì $1 - \cos x$ là VCB cấp cao hơn VCB x.

Khi $x \to 0$ thì $\sin x$ và x^2 là 2 VCB cùng cấp.

Khi $x \to 0$ thì $\sin x$ và x là 2 VCB tương đương.

Ta có các VCB tương đương sau:

Khi $x \to 0 : \sin ax \sim ax, \tan ax \sim ax, 1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}, e^x - 1 \sim x, ln(x+1) \sim x$

Ứng dụng VCB tương đương để khử dạng vô định $\dfrac{0}{0}$

i) Nếu $f(x) \sim (f_1(x)), g(x) \sim (g_1(x)), x \to x_0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$

ii) *Quy tắt ngắt bỏ VCB cấp cao*: giả sử $f(x), g(x)$ là 2VCB khi $x \to x_0$ và $f(x), g(x)$ đều là tổng của nhiều VCB. Khi đó, giới hạn của tỉ số $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ bằng giới hạn của tỉ số hai VCB cấp thấp nhất ở tử và mẫu.

***Ví dụ* 17.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\ln(1+2x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{2x} = \dfrac{3}{2}$

***Ví dụ* 18.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + \sin^3 x}{2x + x^2 + 3x^4} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$

3.4.2 Vô cùng lớn

Định nghĩa 13. Hàm số $f(x)$ được gọi là một vô cùng lớn, viết tắt là VCL khi $x \to x_0$ nếu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$.

***Ví dụ* 19.** Khi $x \to 0$ thì $\dfrac{1}{x}$ là 1 VCL.

Các tính chất của VCL

i) Nếu $f(x)$ là VCL khi $x \to x_0$ thì $C.f(x)$ (C: hằng số) cũng là VCL khi $x \to x_0$.

ii) Các định lí về tổng, tích, thương các VCL được suy trực tiếp từ đinh lí tổng, tích, thương các đại lượng có giới hạn .

So sánh các VCL

Cho $f_1(x)$ và $f_2(x)$ là 2 VCB khi $x \to x_0$. Khi đó:

i) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \infty$ thì ta nói rằng $f_1(x)$ có bậc cao hơn $f_2(x)$.

ii) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = C, C \neq 0$ thì ta nói rằng $f_1(x)$ cùng bậc với $f_2(x)$.

Đặc biệt nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1$ thì ta nói rằng $f_1(x)$ tương đương với $f_2(x)$ khi $x \to x_0$, kí hiệu: $f_1(x) \sim f_2(x), x \to x_0$.

Ứng dụng VCL để khử dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

i) Nếu $f(x) \sim (f_1(x)), g(x) \sim (g_1(x)), x \to x_0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$

ii) *Quy tắt ngắt bỏ VCB cấp thấp*: giả sử $f(x), g(x)$ là 2VCL khi $x \to x_0$ và $f(x), g(x)$ đều là tổng của nhiều VCL. Khi đó, giới hạn của tỉ số $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ bằng giới hạn của tỉ số hai VCB cấp cao nhất ở tử và mẫu.

Ví dụ 20. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^3 + x^2 - 4x}{x^3 - 3x^2 + x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^3}{{}^3x} = 3$

4 Sự liên tục của hàm số

4.1 Định nghĩa

Định nghĩa 14. Cho hàm f xác định trong khoảng (a; b). Ta nói hàm $f(x)$ *liên tục* tại điểm $x_0 \in (a; b)$ nếu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Hàm số không liên tục tại điểm x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm x_0.

Định nghĩa 15. Cho hàm f xác định trong một lân cận $(x_0 - \delta, x_0)$. Nếu: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ thì ta nói hàm $f(x)$ *liên tục trái* tại điểm x_0

Định nghĩa 16. Cho hàm f xác định trong một lân cận $(x_0, x_0 + \delta)$. Nếu: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ thì ta nói hàm $f(x)$ *liên tục phải* tại điểm x_0

Định nghĩa 17. Hàm f được gọi là *liên tục trên khoảng* (a, b) nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó. Nếu nó liên tục trên khoảng (a, b) và liên tục trái tại b, liên tục phải tại a ta nói f liên tục trên $[a, b]$.

***Ví dụ* 21.** Hàm số $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{nếu } x \leq 0, \\ x-1 & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$

xác định tại mọi $x \in \mathbb{R}$ nhưng $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1 \neq 1 = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

Vậy $x = 0$ là điểm gián đoạn của hàm số.

***Ví dụ* 22.** Xét tính liên tục của hàm số sau trên R: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{nếu } x \neq 0, \\ a & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

Giải.

Tập xác định của hàm số: R. Với $x \neq 0$, hàm số liên tục.

Với $x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1, f(0) = a$

Nếu $a = 1$ thì hàm số liên tục tại $x = 0$

Nếu$a \neq 1$ thì hàm số gián đoạn tại $x = 0$

Vậy $a = 1$ thì hàm số liên tục trên R, $a \neq 1$ thì hàm số liên tục tại mọi điểm $x \neq 0$

4.2 Các tính chất của hàm liên tục

Định lý 4.1. *Nếu hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì f bị chặn trên đoạn $[a, b]$, tức là tồn tại hai số M và m sao cho $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$. Hơn nữa f đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó, tức là có $\alpha, \beta, \beta \in [a, b]$ để*

$$f(\beta) = \min_{x\in[a,b]} f(x) \text{ và } f(\alpha) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Định lý 4.2. *(Định lý về giá trị trung gian)*

Nếu hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$, m và M là các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của nó trên đoạn đó thì với mọi số μ nằm giữa m và M, luôn tồn tại điểm $x_0 \in [a, b]$ sao cho: $f(x_0) = \mu$.

Hệ quả:

Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, $f(a).f(b) < 0$ thì trong khoảng (a, b) tồn tại một điểm x_0 sao cho $f(x_0) = 0$.

4.3 Sự liên tục đều

Hàm số $f(x)$ liên tục trong khoảng (a, b) được gọi là liên tục đều trong (a, b) nếu với $\epsilon > 0$ bất kì luôn tìm được $\delta > 0$ sao cho với bất kì $u, v \in (a, b)$ thỏa mãn

$$|u - v| < \delta \text{thì kéo theo} |f(u) - f(v)| < \epsilon$$

Định lý 4.3. *(định lí Heine) Hàm số* $f(x)$ *liên tục trong khoảng đóng* $[a, b]$ *thì* $f(x)$ *liên tục đều trong* $[a, b]$.

CHƯƠNG II ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

1 Đạo hàm của hàm số

1.1 Đạo hàm

1.1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng (a, b). Ta nói rằng hàm số $f(x)$ *khả vi tại điểm* $x_0 \in (a, b)$ nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$$

Giới hạn này được gọi là đạo hàm của hàm f tại điểm x_0 và được kí hiệu là $f'(x_0)$.

Hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0 được gọi là khả vi tại điểm x_0.

Nếu hàm số $f(x)$ *khả vi tại mọi điểm* $x \in (a, b)$ thì ta nói rằng $f(x)$ *khả vi trong khoảng* (a, b).

Nhận xét: Nếu đặt $\Delta x = x - x_0$ thì biểu thức định nghĩa trở thành:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(c)$$

Vậy đạo hàm tại $x = x_0$ của hàm $f(x)$ chính là giới hạn của tỉ số giữa số gia của hàm số tại điểm $x = x_0$ (tức là hiệu $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$) với số gia của đối số tại điểm $x = x_0$ (tức là hiệu $x_0 + \Delta x - x_0$).

1.1.2 Cách tính đạo hàm theo định nghĩa

Đặt $\Delta x = x - x_0$: số gia của đối số

Tính $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$: số gia của hàm số

Đạo hàm của hàm số: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Ví dụ 1.

(1) Xét hàm số $f(x) = a, x \in \mathbb{R}$ thì $f'(x) = 0$.

Thật vậy, ta có: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = a - a = 0$

Suy ra $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

(2) Xét hàm số $f(x) = x, x \in \mathbb{R}$.

Ta có $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x$

suy ra, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

Vậy $f'(x) = 1$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

(3) Xét hàm số $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin(\frac{\Delta x}{2})\cos(x + \frac{\Delta x}{2}).$$

Suy ra

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin(\frac{\Delta x}{2})\cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) = \cos x.$$

Vậy $f'(x) = \cos x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

1.2 Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Nếu vẽ đồ thị của hàm số $f(x)$ trong một hệ tọa độ Decart vuông góc thì tỉ số $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ chính là hệ số góc của dây cung M_0M với $M_0(x_0, f(x_0))$ và $M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$.

Khi cho $\Delta x \to 0$ thì điểm M trên đồ thị tiến đến điểm M_0, do vậy, cát tuyến M_0M tiến đến tiếp tuyến tại điểm M_0. Vậy, đạo hàm tại mỗi điểm chính là tiếp tuyến của đồ thị của $f(x)$ tại điểm đó.

Hàm số f có đạo hàm $f'(x_0)$ tại điểm x_0 khi và chỉ khi đồ thị (C) có tiếp tuyến tại điểm M_0 với hệ số góc $f'(x_0)$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số f tại điểm M_0 là:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

1.3 Các quy tắc tính đạo hàm

Định lý 1.1. *Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số xác định trên (a, b), giả sử $f(x)$ và $g(x)$ đều có đạo hàm tại $x \in (a, b)$. Khi đó $f(x) \pm g(x), f(x)g(x)$ cũng có đạo hàm tại x và*

1. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$,

2. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, *đặc biệt* $(cf(x))' = cf'(x)$.

3. *Nếu* $g(x) \neq 0$ *thì* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *cũng có đạo hàm tại x và* $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Từ (3) ta suy ra

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}.$$

Định lí sau đây cho ta cách tính đạo hàm của hàm số hợp.

Định lý 1.2 (Đạo hàm của hàm hợp). *Nếu $u = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 và $y = g(u)$ có đạo hàm tại $u_0 = f(x_0)$, thì gof cũng có đạo hàm tại x_0 và*

$$(gof)'(x_0) = \{g[f(x_0)]\}' = g'(u_0).f'(x_0).$$

(Vế phải là: đạo hàm của y theo u nhân với đạo hàm của u theo x).

Ví dụ 2. Hàm số $y = \sin x^2$ là hợp của hai hàm $y = \sin u$ và $u = x^2$. Ta có $y'(u) = \cos u$ và $u'(x) = 2x$. Do đó $y'(x) = \cos(x^2)2x$.

Định lý 1.3. *Giả sử $x = f(y)$ có đạo hàm tại $y_0 \in (a, b)$ và $f'(y_0) \neq 0$. Nếu tồn tại hàm ngược $y = g(x)$ liên tục tại $x_0 = f(y_0)$ thì tồn tại đạo hàm $g'(x_0)$ và*

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)}.$$

Ví dụ 3. Cho $x = f(y) = y^2$, $y \in (0, \infty)$. Dễ dàng thấy rằng f có hàm ngược $y = g(x) = f^{-1}(x) = x$. Ta áp dụng định lý trên và có ngay kết quả.

$$g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Chẳng hạn, để tính đạo hàm của hàm số $y = \arcsin x$ ta có thể tính thông qua hàm số $y = \sin x$. Vì hàm số $y = \sin x$ có hàm số ngược là $x = \arcsin y$. Theo công thức tính đạo hàm của hàm số ngược ta có $(\arcsin y)' = \dfrac{1}{(\sin x)'} = \dfrac{1}{\cos x}$.

Mặt khác, $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2}$. Vậy $(\arcsin y)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$ hay

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

1.4 Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản

1. $(c)' = 0$	2. $(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$
3. $(e^x)' = e^x$	4. $(a^x)' = a^x \ln a$
5. $(\ln\|x\|)' = \dfrac{1}{x}, x \neq 0$	6. $(\log_a \|x\|)' = \dfrac{1}{x \ln a}, x \neq 0$
7. $(\sin x)' = \cos x$	8. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
9. $(\cos x)' = -\sin x$	10. $(\cot x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1; 1)$	12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1; 1)$
13. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$	14. $(\text{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

1.5 Đạo hàm vô cùng, đạo hàm một phía

Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a,b), x_0 \in (a,b)$.

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ thì ta nói rằng đạo hàm của hàm số f tại x_0 bằng $+\infty$ và viết là $f'(x_0)=+\infty$. Định nghĩa tương tự với $f'(x_0)=-\infty$.

Đạo hàm một phía

Giả sử hàm số f xác định trong khoảng $[x_0,b]$ (hoặc $[a,x_0]$). Nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in R$$

hoặc

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in R$$

thì giới hạn này gọi là *đạo hàm phải* (hoặc *đạo hàm trái*) của f tại điểm x_0, kí hiệu: $f'_+(c)$ (hoặc $f'_-(c)$).

1.6 Đạo hàm cấp cao

Cho f là một hàm có đạo hàm trong khoảng (a,b). Khi đó ta có một hàm số mới f' xác định bởi

$$\begin{aligned} f' : \ (a,b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x). \end{aligned}$$

Định nghĩa 2. i) Nếu hàm f' có đạo hàm $(f')'(x_0)$ tại điểm $x_0 \in (a,b)$ thì số $(f')'(x_0)$ được gọi là *đạo hàm cấp 2* của hàm f tại x_0 và được kí hiệu là $f''(x_0)$. Vậy:

$$f''(x_0) = (f')'(x_0).$$

Một cách tổng quát ta có định nghĩa

ii) Nếu hàm f có đạo hàm cấp $n-1, n \in \mathbb{N}^*$ trong một lân cận U của $x_0 \in (a,b)$. Khi đó nếu hàm

$$\begin{aligned} f^{(n-1)} : \ (a,b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

có đạo hàm tại điểm x_0 thì đạo hàm này $(f^{(n-1)})'(x_0)$ được gọi là *đạo hàm cấp n* của f tại x_0 và được kí hiệu là $f^{(n)}(x_0)$.

Vậy $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$.

iii) Ta nói hàm f có đạo hàm cấp n (hay khả vi cấp n) trên (a, b) nếu nó có đạo hàm cấp n tại mọi điểm $x \in (a, b)$.

Đạo hàm f' được gọi là *đạo hàm cấp 1* của f. Ta cũng quy ước đạo hàm cấp 0 của f chính là f.

Ta cũng nói f khả vi liên tục đến cấp n trên (a, b) nếu f khả vi đến cấp n trên (a, b) và $f^{(n)} : (a, b) \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục.

Ví dụ 4. Giả sử $f(x) = x^n, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

Khi đó $f'(x) = nx^{n-1}$, $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$, ..., $f^{(m)}(x) = n(n-1)...(n-m+1)x^{n-m}$ nếu $m \leq n$ và $f^{(m)}(x) = 0$ nếu $n < m$.

Ví dụ 5.

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$
$$f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$
$$f''(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2\frac{\pi}{2}).$$

Bằng quy nạp ta tính được:

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2}), x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Tương tự: $f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}$ thì

$$f^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2}), x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, x \neq 1.$$

thì

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}.$$

Ví dụ 6. Giả sử u và v là hai hàm số có đạo hàm đến cấp n tại $x_0 \in (a, b)$. Khi đó tích của chúng, $u.v$ xác định trên (a, b) bởi $(uv)(x) = u(x).v(x)$ cũng có đạo hàm đến cấp n tại x_0 và ta có công thức sau gọi là công thức Leibniz

$$(uv)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)}(x_0) v^{(n-k)}(x_0), \text{ trong đó } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{1.1}$$