BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐÔNG Á

ThS.PHẠM THỊ NGỌC MINH

GIÁO TRÌNH
PHƯƠNG PHÁP TÍNH

LƯU HÀNH NỘI BỘ

Đà Nẵng, 2013

CHƯƠNG.1. SAI SỐ

1.1. NHẬP MÔN PHƯƠNG PHÁP TÍNH

1.1.1. *Giới thiệu môn phương pháp tính*

Phương pháp tính là bộ môn toán học có nhiệm vụ giải đến kết quả bằng số cho các bài toán, nó cung cấp các phương pháp giải cho những bài toán trong thực tế mà không có lời giải chính xác. Môn học này là cầu nối giữa toán học lý thuyết và các ứng dụng của nó trong thực tế.

Trong thời đại tin học hiện nay thì việc áp dụng các phương pháp tính càng trở nên phổ biến nhằm tăng tốc độ tính toán.

1.1.2. *Nhiệm vụ môn học*

- Tìm ra các phương pháp giải cho các bài toán gồm: phương pháp (PP) đúng và phương pháp gần đúng.

  + Phương pháp: chỉ ra kết quả dưới dạng một biểu thức giải tích cụ thể.

  + Phương pháp gần đúng: thường cho kết quả sau một quá trình tính lặp theo một quy luật nào đó, nó được áp dụng trong trường hợp bài toán không có lời giải đúng hoặc nếu có thì quá phức tạp.

- Xác định tính chất nghiệm

- Giải các bài toán về cực trị

- Xấp xỉ hàm: khi khảo sát, tính toán trên một hàm f(x) khá phức tạp, ta có thể thay hàm f(x) bởi hàm g(x) đơn giản hơn sao cho $g(x) \approx f(x)$. Việc lựa chọn g(x) được gọi là phép xấp xỉ hàm.

- Đánh giá sai số: khi giải bài toán bằng phương pháp gần đúng thì sai số xuất hiện do sự sai lệch giữa giá trị nhận được với nghiệm thực của bài toán. Vì vậy ta phải đánh giá sai số để từ đó chọn ra được phương pháp tối ưu nhất.

1.1.3. *Trình tự giải bài toán trong phương pháp tính*

- Khảo sát, phân tích bài toán

- Lựa chọn phương pháp dựa vào các tiêu chí sau:

  + Khối lượng tính toán ít

  + Đơn giản khi xây dựng thuật toán

  + Sai số bé

  + Khả thi

- Xây dựng thuật toán: sử dụng ngôn ngữ giả hoặc sơ đồ khối (càng mịn càng tốt).

- Viết chương trình: sử dụng ngôn ngữ lập trình (C, C++, Pascal, Matlab,…)

- Thực hiện chương trình, thử nghiệm, sửa đổi và hoàn chỉnh.

1.2. SAI SỐ

1.2.1. *Khái niệm*

Giả sử x là số gần đúng của x* (x* : số đúng), khi đó $\Delta = |x - x^*|$ gọi là sai số thực sự của x.

Vì không xác định được Δ nên ta xét đến 2 loại sai số sau:

- Sai số tuyệt đối : Giả sử ∃Δx > 0 đủ bé sao cho $|x - x^*| \le \Delta x$. Khi đó Δx gọi là sai số tuyệt đối.

- Sai số tương đối : $\delta x = \dfrac{\Delta x}{|x|}$.

1.2.2. *Các loại sai số*

Dựa vào nguyên nhân gây sai số, ta có các loại sau:

- Sai số giả thiết: xuất hiện do việc giả thiết bài toán đạt được một số điều kiện lý tưởng nhằm làm giảm độ phức tạp của bài toán.

- Sai số do số liệu ban đầu: xuất hiện do việc đo đạc và cung cấp giá trị đầu vào không chính xác.

- Sai số phương pháp : xuất hiện do việc giải bài toán bằng phương pháp gần đúng.

- Sai số tính toán : xuất hiện do làm tròn số trong quá trình tính toán, quá trình tính càng nhiều thì sai số tích luỹ càng lớn.

1.2.3. *Sai số tính toán*

Giả sử dùng n số gần đúng $x_i = (i = \overline{1, n})$ để tính đại lượng y, với $y = f(x_i) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Trong đó :

- f là hàm khả vi liên tục theo các đối số x_i.

Khi đó sai số của y được xác định theo công thức sau :

- Sai số tuyệt đối : $$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

- Sai số tương đối : $$\delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

- Trường hợp f có dạng tổng : $y = f(x_i) = \pm x_1 \pm x_2 \pm ... \pm x_n$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| = 1 \quad \forall \text{i suy ra } \Delta y = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$$

- Trường hợp f có dạng tích : $y = f(x_i) = x_1 * x_2 * ... * x_n$

$$\ln f = \ln(x_1 x_2 ... x_n) = (\ln x_1 + \ln x_2 + ... + \ln x_n)$$

$$\left|\frac{\partial \ln f}{\partial x_i}\right| = \frac{1}{|x_i|} \quad \forall \text{i suy ra } \delta y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta x_i}{|x_i|} = \sum_{i=1}^{n} \delta x_i \ .$$

Vậy $\delta y = \sum_{i=1}^{n} \delta x_i$

- Trường hợp dạng thương: $y = f(x) = \frac{x_1}{x_2}$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{1}{x_2} \ ; \ \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{-x_1}{x_2^2}$$

$$\Rightarrow \Delta y = \frac{1}{|x_2|} . \Delta x_1 + \frac{|-x_1|}{|x_2^2|} . \Delta x_2 = \frac{|x_2| \Delta x_1 + |x_1| \Delta x_2}{x_2^2}$$

$$\Rightarrow \delta y = \frac{\Delta y}{|y|} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} = \delta x_1 + \delta x_2$$

- Trường hợp dạng lũy thừa : $y = f(x) = x^{\alpha} (\alpha > 0)$

$\ln y = \ln f = \alpha \ln x$

$$\left|\frac{\partial \ln f}{\partial x}\right| = \frac{\alpha}{|x|}$$

Suy ra $\delta y = \alpha \frac{\Delta x}{|x|} = \alpha \delta x$

Ví dụ 1.1:

Cho a ≈ 10,25 ; b ≈ 0,324 ; c ≈ 12,13

Tính sai số của :

$$y_1 = \frac{a^3}{b\sqrt{c}} \ ; \qquad y_2 = a^3 - b\sqrt{c}$$

<u>Giải :</u>

$$\delta y_1 = \delta(a^3) + \delta(b\sqrt{c}) = 3\delta a + \delta b + \frac{1}{2}\delta c$$

$$= 3\frac{\Delta a}{|a|} + \frac{\Delta b}{|b|} + \frac{1}{2}\frac{\Delta c}{|c|}$$

$$\Delta y_2 = \Delta(a^3) + \Delta(b\sqrt{c}) = |a^3|\delta(a^3) + |b\sqrt{c}|\delta(b\sqrt{c})$$

$$\Delta y_2 = 3|a^3|\frac{\Delta a}{|a|} + b\sqrt{c}\,(\frac{\Delta b}{|b|} + \frac{1}{2}\frac{\Delta c}{|c|})$$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 1

1. Nêu khái niệm sai số tuyệt đối.
2. Nêu khái niệm sai số tương đối.
3. Dựa vào nguyên nhân gây sai số, trình bày các loại sai số.
4. Trình bày sai số tuyệt đối khi f là hàm có dạng tổng.
5. Trình bày sai số tương đối khi f là hàm có dạng tích.
6. Cho a ≈ 10.25, b ≈ 0.324, c ≈ 12.13. Tính sai số của $y = \dfrac{a^2}{b\sqrt{c}}$.
7. Cho a ≈ 10.25, b ≈ 0.324, c ≈ 12.13. Tính sai số của $y = a^4 - b\sqrt{c}$.
8. Tính thể tích khối cầu có đường kính d = 3.7cm và π = 3.14 ± 0.0016.
9. Một hình trụ có bán kính R = 2m, chiều cao h = 3m. Hỏi ΔR và Δh bằng bao nhiêu để thể tích V có độ chính xác là $\Delta V = 0.1m^3$?
10. Một hình cầu có bán kính đáy R = 5.87cm. Tính thể tích hình cầu với độ chính xác là $0.01cm^3$?
11. Xác định sai số tuyệt đối của các số gần đúng sau nếu biết sai số tương đối của chúng:

    a = 35,72; $\delta_a = 1\%$

    b = 0,896; $\delta_b = 10\%$

    c = 231,44; $\delta_c = 1\%$
12. Khi đo một số góc, ta nhận được kết quả sau:

    a = 45^0; b = $75^0$20’44”

Hãy xác định sai số tương đối của các số gần đúng đó, nếu sai số tuyệt đối của phép đo là 1”.

13. Xác định số các chữ số đáng tin trong các số gần đúng sau khi biết sai số tuyệt đối của chúng:

    a = 0,1132; $\Delta_a = 0,1.10^{-3}$

    b = 2,325; $\Delta_b = 0,1.10^{-1}$

    c = 293,481; $\Delta_c = 0,1$
14. Hãy xác định số các chữ số đáng tin trong các số gần đúng sau khi biết sai số tương đối của chúng là:

    a = 0,2218; $\delta_a = 0,2.10^{-1}$

    b = 0,02425; $\delta_b = 0,5.10^{-2}$

    c = 0,000135; $\delta_c = 0,15$
15. Quy tròn các số gần đúng dưới đây với 3 chữ số có nghĩa đáng tin và xác định sai số tuyệt đối, sai số tương đối của chúng:

    a) 1,255

    b) -392,85

c) 0,1545
d) 625,55

16. Đường kính của một đường tròn được đo chính xác tới 1mm là d = 0,842m. Tìm diện tích hình tròn đó.
17. Tìm giá trị hàm $u = xy^2z^3$ nếu:

    x = 37,1 và $\Delta_x = 0,3$

    y = 9,87 và $\Delta_y = 0,11$

18. Hãy xác định sai số tuyệt đối của số xấp xỉ sau đây, cho biết sai số tương đối của nó:

    b = 12627; $\delta_b = 0,2\%$

19. Tính sai số tuyệt đối giới hạn và sai số tương đối giới hạn của thể tích hình cầu:

    $$V = \frac{1}{6}\pi d^3$$

    nếu cho đường kính d = 3,5 ± 0,03cm và π = 3,14 ± 0,0016.

CHƯƠNG.2. GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH

2.1. GIỚI THIỆU

Để tìm nghiệm gần đúng của phương trình f(x) = 0 cần tiến hành qua 2 bước:

- Tách nghiệm: xét tính chất nghiệm của phương trình, phương trình có nghiệm hay không, có bao nhiêu nghiệm, các khoảng chứa nghiệm nếu có. Đối với bước này, ta có thể dùng phương pháp đồ thị, kết hợp với các định lý mà toán học hỗ trợ.

- Chính xác hoá nghiệm: thu hẹp dần khoảng chứa nghiệm để hội tụ được đến giá trị nghiệm gần đúng với độ chính xác cho phép. Trong bước này ta có thể áp dụng một trong các phương pháp:

+ Phương pháp chia đôi

+ Phương pháp lặp

+ Phương pháp tiếp tuyến

+ Phương pháp dây cung

2.2. TÁCH NGHIỆM

*** Phương pháp đồ thị:**

Trường hợp hàm f(x) đơn giản

- Vẽ đồ thị f(x)

- Nghiệm phương trình là hoành độ giao điểm của f(x) với trục x, từ đó suy ra số nghiệm, khoảng nghiệm.

Trường hợp f(x) phức tạp

- Biến đổi tương đương f(x)=0 <=> g(x) = h(x)

- Vẽ đồ thị của g(x), h(x)

- Hoành độ giao điểm của g(x) và h(x) là nghiệm phương trình, từ đó suy ra số nghiệm, khoảng nghiệm.

**** Định lý 1:***

Giả sử f(x) liên tục trên (a,b) và có f(a)*f(b) < 0. Khi đó trên (a,b) tồn tại một số lẻ nghiệm thực $x \in (a,b)$ của phương trình f(x) = 0. Nghiệm là duy nhất nếu f'(x) tồn tại và không đổi dấu trên (a,b).

Ví dụ 2.1:

Tách nghiệm cho phương trình : $x^3 - x + 5 = 0$

Giải :

$f(x) = x^3 - x + 5 = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 1$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1/\sqrt{3}$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{3}$		$1/\sqrt{3}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	$y_{CĐ} > 0$	↘	CT	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, phương trình có 1 nghiệm $x < -1/\sqrt{3}$

f(-1)*f(-2) < 0, vậy phương trình trên có 1 nghiệm $x \in (-2, -1)$.

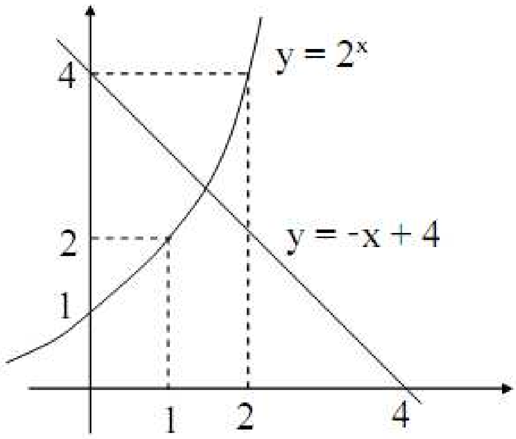
Ví dụ 2.2:

Tách nghiệm cho phương trình : $2^x + x - 4 = 0$

<u>Giải :</u>

$2^x + x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2^x = -x + 4$

Áp dụng phương pháp đồ thị :



Từ đồ thị suy ra phương trình trên có 1 nghiệm $x \in (1, 2)$.

**** Định lý 2:***

Giả sử α là nghiệm đúng và x là nghiệm gần đúng của phương trình f(x) = 0, cùng nằm trong khoảng nghiệm [a, b] và f'(x) ≥ m ≥ 0 khi a ≤ x ≤ b. Khi đó $|x - \alpha| \le \frac{|f(x)|}{m}$.

Ví dụ 2.3:

Cho nghiệm gần đúng của phương trình $x^4 - x - 1 = 0$ là 1,22. Hãy ước lượng sai số tuyệt đối là bao nhiêu ?

<u>Giải :</u>

$f(x) = f(1,22) = 1,22^4 - 1,22 - 1 = -0,0047 < 0$

$f(1,23) = 0,588 > 0$

$\Rightarrow$ nghiệm phương trình $x \in (1,22; 1,23)$

f'(x) = $4x^3 - 1 \geq 4*1,22^3 - 1 = 6,264 = m \quad \forall x \in (1,22;1,23)$

Theo định lý 2 : $\Delta x = 0,0047/6,264 = 0,0008$ (vì $|x-\alpha| \leq 0,008$).

2.3. TÁCH NGHIỆM CHO PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

Xét phương trình đại số : $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$ (1)

**** Định lý 3:***

Cho phương trình (1) có $m_1 = \max\{|a_i|\} \quad i = \overline{1,n}$

$m_2 = \max\{|a_i|\} \quad i = \overline{0,n-1}$

Khi đó mọi nghiệm x của phương trình đều thỏa mãn :

$$x_1 = \frac{|a_n|}{m_2 + |a_n|} \leq |x| \leq 1 + \frac{m_1}{|a_0|} = x_2$$

**** Định lý 4:***

Cho phương trình (1) có $a_0 > 0$, a_m là hệ số âm đầu tiên. Khi đó mọi nghiệm dương của phương trình đều $\leq N = 1 + \sqrt[m]{a/a_0}$, với $a = \max\{|a_i|\} \; i = \overline{0,n}$ sao cho $a_i < 0$.

Ví dụ 2.4:

Cho phương trình : $5x^5 - 8x^3 + 2x^2 - x + 6 = 0$

Tìm cận trên nghiệm dương của phương trình trên.

<u>Giải :</u>

Ta có $a_2 = -8$ là hệ số âm đầu tiên, nên m = 2, $a = \max(8,1) = 8$

Vậy cận trên nghiệm dương : $N = 1 + \sqrt{8/5}$

**** Định lý 5:***

Cho phương trình (1), xét các đa thức :

$$\varphi_1(x) = x^n f(1/x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$$
$$\varphi_2(x) = f(-x) = (-1)^n(a_0x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - ... + (-1)^n a_n)$$
$$\varphi_3(x) = x^n f(-1/x) = (-1)^n(a_0x^n - a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} - ... + (-1)^n a_0)$$

Giả sử N_0, N_1, N_2, N_3 là cận trên các nghiệm dương của đa thức f(x), $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$. Khi đó mọi nghiệm dương của phương trình (1) đều nằm trong khoảng **[$1/N_1$, N_0]** và mọi nghiệm âm nằm trong khoảng **[$-N_2$,$-1/N_3$]**

Ví dụ 2.5:

Xét phương trình :

$3x^2 + 2x - 5 = 0 \quad \rightarrow \quad N_0 = 1 + \sqrt{5/3}$ (định lý 4)

$\varphi_1(x) = 3 + 2x - 5x^2$ $\rightarrow$ N_1 không tồn tại ($a_0 < 0$)

$\varphi_2(x) = 3x^2 - 2x - 5$ $\rightarrow$ $N_2 = 1 + 5/3$(định lý 4)

$\varphi_3(x) = 3 - 2x - 5x^2$ $\rightarrow$ N_3 không tồn tại ($a_0 < 0$)

Vậy : mọi nghiệm dương $x < 1 + \sqrt{5/3}$

mọi nghiệm âm $x > -(1 + 5/3) = -8/3$

2.4. CHÍNH XÁC HÓA NGHIỆM

2.4.1. *Phương pháp chia đôi*

a. Ý tưởng

Cho phương trình f(x) = 0, f(x) liên tục và trái dấu tại 2 đầu [a,b]. Giả sử f(a) < 0, f(b) > 0 (nếu ngược lại thì xét –f(x)=0). Theo định lý 1, trên [a,b] phương trình có ít nhất 1 nghiệm μ.

Cách tìm nghiệm μ:

Đặt $[a_0, b_0] = [a, b]$ và lập các khoảng lồng nhau $[a_i,b_i]$ (i=1, 2, 3, …)

$$[a_i, b_i] = \begin{cases} [a_i, (a_{i-1} + b_{i-1})/2] & \text{nếu } f((a_{i-1} + b_{i-1})/2) > 0 \\ [(a_{i-1} + b_{i-1})/2, b_i] & f((a_{i-1} + b_{i-1})/2) < 0 \end{cases}$$

Như vậy:

- Hoặc nhận được nghiệm đúng ở một bước nào đó:

  $\mu = (a_{i-1} + b_{i-1})/2$ nếu $f((a_{i-1} + b_{i-1})/2) = 0$

- Hoặc nhận được 2 dãy $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$, trong đó:

  $\{a_n\}$: là dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên

  $\{b_n\}$: là dãy đơn điệu giảm và bị chặn dưới

Nên $\exists \lim\limits_{n\to\alpha} a_n = \lim\limits_{n\to\alpha} b_n = \mu$ là nghiệm phương trình.

Ví dụ 2.6:

Tìm nghiệm phương trình: $2^x + x - 4 = 0$ bằng phương pháp chia đôi

<u>Giải:</u>

- Tách nghiệm: phương trình có 1 nghiệm x $\in (1,2)$
- Chính xác hoá nghiệm: áp dụng phương pháp chia đôi (f(1) < 0)

Bảng kết quả:

a_n	b_n	$f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$
1	2	+
1	1.5	-

1.25	1.5	-
1.375	1.5	+
1.375	1.438	+
1.375	1.406	+
1.375	1.391	-
1.383	1.391	+
1.383	1.387	-
1.385	1.387	-
1.386	1.387	

$\lim\limits_{n\to\alpha} a_n = \lim\limits_{n\to 11} b_n = 1.386$

Kết luận: Nghiệm của phương trình: x ≈ 1.386

b. Thuật toán

- Khai báo hàm f(x) (hàm đa thức, hàm siêu việt)
- Nhập a, b sao cho f(a)<0 và f(b)>0
- Lặp

c = (a+b)/2

nếu f(c) > 0 → b = c

ngược lại a = c

trong khi $\left(\left|f(c)\right| > \varepsilon\right) / *\left|a-b\right| > \varepsilon$ và f(c) != 0 */

- Xuất nghiệm: c.

2.4.2. ***Phương pháp lặp***

a. Ý tưởng

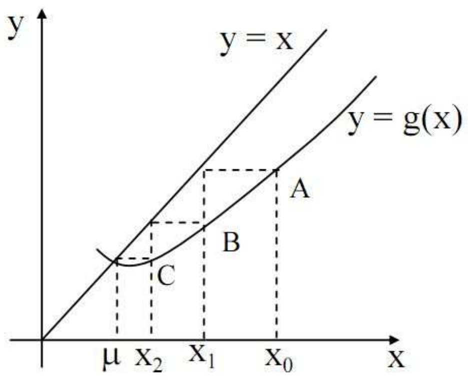
Biến đổi tương đương: f(x) = 0 <=> x = g(x)

Chọn giá trị ban đầu $x_0 \in$ khoảng nghiệm (a,b), tính $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$, …, $x_k = g(x_{k-1})$.

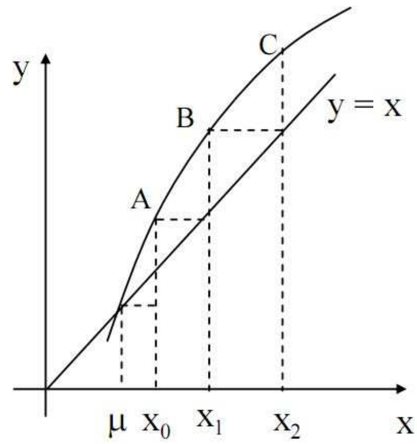
Như vậy ta nhận được dãy $\{x_n\}$, nếu dãy này hội tụ thì tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \eta$ (là nghiệm phương trình).

b. Ý nghĩa hình học

Hoành độ giao điểm của 2 đồ thị y=x và y=g(x) là nghiệm phương trình



Hình a



Hình b

Trường hợp hình a: hội tụ đến nghiệm μ

Trường hợp hình b: không hội tụ đến nghiệm μ (phân ly nghiệm)

Sau đây ta xét định lý về điều kiện hội tụ đến nghiệm sau một quá trình lặp

Định lý (điều kiện đủ)

Giả sử hàm g(x) xác định, khả vi trên khoảng nghiệm [a,b] và mọi giá trị g(x) đều thuộc [a,b]. Khi đó nếu $\exists q > 0$ sao cho $|g'(x)| \le q < 1$ $\forall x \in (a,b)$ thì:

+ Quá trình lặp hội tụ đến nghiệm không phụ thuộc vào $x_0 \in [a,b]$

+ Giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \eta$ là nghiệm duy nhất trên (a,b).

Lưu ý:

- Định lý đúng nếu hàm g(x) xác định và khả vi trong (-∞,+∞), trong khi đó điều kiện định lý thoả mãn.

- Trong trường hợp tổng quát, để nhận được xấp xỉ x_n với độ chính xác ε cho trước, ta tiến hành phép lặp cho đến khi 2 xấp xỉ liên tiếp thoả mãn:

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| \le \frac{1-q}{q}\varepsilon$$

Ví dụ 2.7:

Tìm nghiệm: $x^3 - x - 1 = 0$ bằng phương pháp lặp.

Giải:

- Tách nghiệm: phương trình có một nghiệm $\in (1,2)$

- Chính xác hoá nghiệm:

$$x^3 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = x^3 - 1;\ x = \frac{x+1}{x^2};\ x = \sqrt[3]{x+1}$$

Chọn $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$

$$g'(x) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{(x+1)^2}} < 1 \quad \forall x \in (1,2)$$

=> áp dụng phương pháp lặp (chọn $x_0 = 1$)

x	$g(x) = \sqrt[3]{x+1}$
1	1.260
1.260	1.312
1.312	1.322
1.322	1.324
1.324	1.325
1.325	1.325

$|x_4 - x_5| < \varepsilon = 10^{-3}$

Nghiệm phương trình $x \approx 1.325$

c. Thuật toán

- Khai báo hàm g(x)
- Nhập x
- Lặp: y = x

  x = g(x)

  trong khi |x - y| > ε
- Xuất nghiệm: x (hoặc y)

2.4.3. *Phương pháp tiếp tuyến*

a. Ý tưởng

Chọn $x_0 \in$ khoảng nghiệm (a, b).

Tiếp tuyến tại A_0 (x_0, $f(x_0)$) cắt trục x tại điểm có hoành độ x_1,

Tiếp tuyến tại A_1 (x_1, $f(x_1)$) cắt trục x tại điểm có hoành độ x_2, …,

Tiếp tuyến tại A_k (x_k, $f(x_k)$) cắt trục x tại điểm có hoành độ x_k, …

Cứ tiếp tục quá trình trên ta có thể tiến dần đến nghiệm μ của phương trình.

**** Xây dựng công thức lặp:***

Phương trình tiếp tuyến tại A_k (x_k, $f(x_k)$)

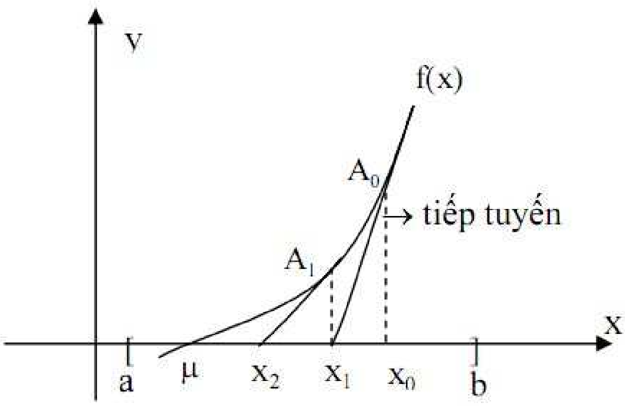
$y - f(x_k) = f'(x_k)*(x - x_k)$

Tiếp tuyến cắt trục x tại điểm có toạ độ (x_{k+1}, 0)

Do vậy: $0 – f(x_k) = f'(x_k)*(x_{k+1} - x_k)$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

b. Ý nghĩa hình học



Định lý (điều kiện hội tụ theo Furier - điều kiện đủ)

Giả sử [a,b] là khoảng nghiệm của phương trình f(x) = 0. Đạo hàm f'(x), f''(x) liên tục, không đổi dấu, không tiêu diệt trên [a,b]. Khi đó ta chọn xấp xỉ nghiệm ban đầu $x_0 \in [a,b]$ sao cho $f(x_0)*f''(x_0) > 0$ thì quá trình lặp sẽ hội tụ đến nghiệm.

Ví dụ 2.8:

Giải phương trình: $x^3 + x - 5 = 0$ bằng phương pháp tiếp tuyến

Giải:

- Tách nghiệm:

$f(x) = x^3 + x - 5$

$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \ \forall x$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Phương trình trên có 1 nghiệm duy nhất.

$f(1)* f(2) = (-3)*5 < 0$

Vậy phương trình có 1 nghiệm duy nhất $x \in (1, 2)$

- Chính xác hoá nghiệm:

$f''(x) = 6x > 0 \ \forall x \in (1, 2)$

$f'(x) > 0 \ \forall x$

Thoả mãn điều kiện hội tụ Furier, áp dụng phương pháp tiếp tuyến.

Chọn với $x_0 = 2$ (vì f(2). f''(2) > 0)

x	f(x)/f'(x)
2	0.385

1.615	0.094
1.521	0.005
1.516	0.000
1.516	

Vậy nghiệm x ≈ 1.516

c. Thuật toán

- Khai báo hàm f(x), fdh(x)
- Nhập x
- Lặp y= x

x = y – f(y)/fdh(y)

trong khi |x - y| > ε

- Xuất nghiệm: x (hoặc y)

2.4.4. ***Phương pháp dây cung***

a. Ý tưởng

Giả sử [a, b] là khoảng nghiệm phương trình f(x) = 0. Gọi A, B là 2 điểm trên đồ thị f(x) có hoành độ tương ứng là a, b. Phương trình đường thẳng qua 2 điểm A(a,f(a)), B(b, f(b)) có dạng:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

Dây cung AB cắt trục x tại điểm có toạ độ (x_1, 0)

Do đó:

$$\frac{0 - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x_1 - a}{b - a}$$

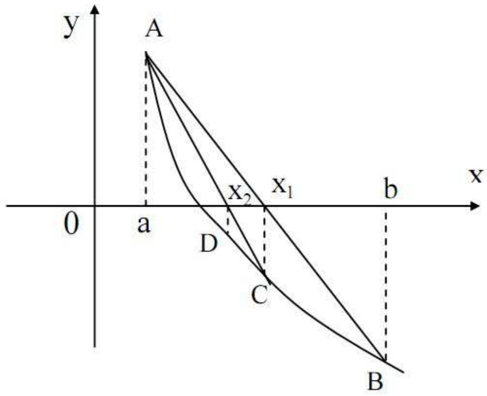
$$x_1 = a - \frac{(b - a) f(a)}{f(b) - f(a)}$$

Nếu f(a)*f(x_1) < 0, thay b = x_1 ta có khoảng nghiệm mới là (a, x_1)

Nếu f(b)*f(x_1) < 0, thay a = x_1 ta có khoảng nghiệm mới là (x_1, b)

Tiếp tục áp dụng phương pháp dây cung vào khoảng nghiệm mới ta được giá trị x_2. Lại tiếp tục như thế ta nhận được các giá trị x_3, x_4, … càng tiến gần với giá trị nghiệm phương trình.

b. Ý nghĩa hình học



Ví dụ 2.9:

Giải phương trình $x^3 + x - 5 = 0$ bằng phương pháp dây cung.

<u>Giải:</u>

- Tách nghiệm: Phương trình có 1 nghiệm $x \in (1, 2)$
- Chính xác hoá nghiệm:

$f(1) = - 3 < 0$; $f(2) = 5 > 0$

Bảng kết quả:

a	b	x	f(x)
1	2	1.333	-0.447
1.333		1.379	-0.020
1.379		1.385	-0.003
1.385		1.386	-0.000
1.386		1.386	

Vậy nghiệm phương trình: $x \approx 1.386$

c. Thuật toán

- Khai báo hàm f(x)
- Nhập a, b
- Tính $x = a – (b - a)f(a) / (f(b) - f(a))$
- Nếu $f(x)*f(a) < 0$.

Lặp $b = x$

$x = a – (b - a)f(a) / (f(b) - f(a))$

trong khi $|x - b| > \varepsilon$

Ngược lại

Lặp $a = x$

x = a – (b - a)f(a) / (f(b) - f(a))

trong khi |x - a| > ε

- Xuất nghiệm: x

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 2

1. Trình bày các bước tìm nghiệm gần đúng của phương trình.
2. Trình bày cách tách nghiệm bằng phương pháp đồ thị.
3. Trình bày cách tách nghiệm cho phương trình đại số.
4. Có bao nhiêu phương pháp chính xác hóa nghiệm? Liệt kê các phương pháp đó?
5. Trình bày ý tưởng của phương pháp chia đôi để chính xác hóa nghiệm.
6. Trình bày thuật toán phương pháp chia đôi để chính xác hóa nghiệm.
7. Trình bày ý tưởng phương pháp lặp để chính xác hóa nghiệm.
8. Trình bày thuật toán phương pháp lặp để chính xác hóa nghiệm.
9. Trình bày ý tưởng phương pháp tiếp tuyến để chính xác hóa nghiệm.
10. Trình bày thuật toán phương pháp tiếp tuyến để chính xác hóa nghiệm.
11. Trình bày ý tưởng phương pháp dây cung để chính xác hóa nghiệm.
12. Trình bày thuật toán phương pháp dây cung để chính xác hóa nghiệm.
13. Tìm nghiệm gần đúng các phương trình:

    a. $x^3 - x + 5 = 0$

    b.$x^3 - x - 1 = 0$

    c. $\sin x - x + 1/4 = 0$

    d. $x^4 - 4x - 1= 0$

    bằng phương pháp chia đôi với sai số không quá 10^{-3}
14. Tìm nghiệm gần đúng các phương trình:

    a. $x^3 - x + 5 = 0$

    b. $x^4 - 4x - 1 = 0$

    bằng phương pháp dây cung với sai số không quá 10^{-2}
15. Tìm nghiệm gần đúng các phương trình:

    a. $e^x - 10x + 7 = 0$

    b. $x^3 + x - 5 = 0$

    bằng phương pháp tiếp tuyến với sai số không quá 10^{-3}
16. Dùng phương pháp lặp tìm nghiệm dương cho phương trình $x^3 - x - 1000 = 0$ với sai số không quá 10^{-3}
17. Tìm nghiệm dương cho phương trình: $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$.
18. Tìm nghiệm âm cho phương trình: $x^4 - 3x^2 + 75x - 1000 = 0$.
19. Dùng các phương pháp có thể để tìm nghiệm gần đúng cho phương trình sau: $\cos 2x + x - 5 = 0$
20. Viết chương trình tìm nghiệm cho có dạng tổng quát:

    $$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

    a. Áp dụng phương pháp chia đôi

b. Áp dụng phương pháp dây cung

21. Viết chương trình tìm nghiệm cho phương trình $e^x - 10x + 7 = 0$ bằng phương pháp tiếp tuyến.
22. Viết chương trình xác định giá trị x_1, x_2 theo định lý 3.
23. Viết chương trình tìm cận trên của nghiệm dương phương trình đại số theo định lý 4.