TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HỒ CHÍ MINH
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

Giáo trình

QUY HOẠCH TOÁN HỌC

Biên soạn : Ngô Hữu Tâm

(Lưu hành nội bộ - 2016)

Lời mở đầu

Giáo trình "*Quy hoạch Toán học*" này được biên soạn nhằm phục vụ cho nhu cầu về tài liệu học tập của sinh viên Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật thành phố Hồ Chí Minh. *Nội dung giáo trình này gồm 6 chương:*

Chương 0 : *Ôn tập và bổ túc một số kiến thức về đại số tuyến tính và giải tích lồi.*
Chương 1 : *Bài toán quy hoạch tuyến tính.*
Chương 2 : *Bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu.*
Chương 3: *Bài toán vận tải.*
Chương 4: *Bài toán sản xuất đồng bộ.*
Chương 5: *Phương pháp sơ đồ mạng PERT-CPM.*

Nội dung môn học như trên là khá phong phú. Tuy nhiên, thời lượng dành cho môn học này chỉ có 45 tiết là hơi ít. Do đó, để tiếp thu tốt môn học, các bạn sinh viên cần đọc kỹ bài học trong giáo trình trước khi đến lớp. Các bạn chỉ cần làm bài tập vừa đủ để hiểu rõ nội dung, ý nghĩa các bài toán và nắm vững các thuật toán, mà không nên mất thời gian nhiều với việc tính toán.

Trước mỗi chương tác giả nêu ra những nội dung, những kiến thức cơ bản mà sinh viên cần phải đạt được. Dựa vào đó mà các bạn sinh viên biết được mình sẽ phải học những gì, cần phải hiểu rõ những khái niệm nào, những nội dung nào cần phải nắm vững và những bài toán dạng nào phải làm được. **Trong mỗi chương, tác giả đưa vào khá nhiều ví dụ phù hợp để minh họa làm sáng tỏ các khái niệm vừa được trình bày đồng thời chỉ ra được rất nhiều ứng dụng vào thực tế.** Sau mỗi chương có phần bài tập được chọn lọc phù hợp để sinh viên tự luyện tập nhằm đạt được sự hiểu biết sâu rộng hơn các khái niệm đã đọc qua và thấy được các ứng dụng rộng rãi của các kiến thức này vào thực tế. Để tiện cho việc ứng dụng vào thực tiễn, sinh viên cần tìm hiểu thêm việc sử dụng các phần mềm tính toán cho môn học này như : Excel, Matlab , Maple , ...-*Phần này sẽ thực hiện qua bài thu hoạch nhóm cùng với nội dung chương 5 khi sinh viên học môn này với tác giả giáo trình.*

Tuy có rất nhiều cố gắng trong công tác biên soạn , nhưng chắc chắn giáo trình này vẫn còn thiếu sót. Chúng tôi xin trân trọng tiếp thu ý kiến đóng góp của các bạn sinh viên và các đồng nghiệp để giáo trình này ngày càng hoàn chỉnh hơn.

Thư góp ý xin gửi về : Ngô Hữu Tâm
Trường Đại học Sư Phạm Kỹ thuật TP. Hồ Chí Minh
Khoa Khoa học Cơ bản
Bộ môn Toán
Email: tamnh@hcmute.edu.vn
huutamngo@yahoo.com.vn

Cuộc sống luôn nảy sinh những vấn đề (bài toán) cần giải quyết. Mỗi khi giải quyết một vấn đề, sau khi đã tìm ra một phương án, chúng ta thường hài lòng ngay với phương án vừa tìm được ,mà ít nghĩ rằng vấn đề còn có thể giải quyết bằng phương án khác tốt hơn. Như vậy, khi tìm phương án để giải quyết một vấn đề, chúng ta phải tìm phương án tốt nhất (nếu có thể). ***Phương án tốt nhất để giải quyết một vấn đề với một số điều kiện, ràng buộc cho trước gọi là phương án tối ưu.***

Mỗi vấn đề cần giải quyết luôn nằm trong một hệ thống nhất định. Bản thân hệ thống này lại nằm trong hệ thống khác lớn hơn gồm nhiều hệ thống nhỏ. Các hệ thống này chịu sự tương tác ảnh hưởng lẫn nhau. Hơn nữa, mỗi vấn đề lại chứa đựng bên trong nó những hệ thống nhỏ hơn và chúng cũng chịu sự tương tác ảnh hưởng lẫn nhau. Do đó, để bảo đảm vấn đề mà chúng ta quan tâm được giải quyết một cách chính xác, chúng ta cần phải chú ý đến tất cả những mối liên hệ và ảnh hưởng nêu trên.

Chương 0

ÔN TẬP VÀ BỔ TÚC MỘT SỐ KIẾN THỨC VỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH VÀ GIẢI TÍCH LỒI

1. Ma trận

Một ma trận A cấp m×n (cỡ m×n) trên **R** là một bảng chữ nhật gồm m×n phần tử trong **R** được viết thành *m hàng* và *n cột* như sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{hay} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Trong đó $a_{ij} \in \mathbf{R}$ là phần tử ở vị trí hàng thứ i và cột thứ j của ma trận A. Đôi khi ma trận A được ký hiệu vắn tắt là : $A = [a_{ij}]_{mxn} = (a_{ij})_{mxn} = A_{mxn}$.

Ma trận cột là ma trận chỉ có một cột : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Ma trận hàng là ma trận chỉ có một hàng: $Y = (y_1 \quad y_2 \quad ...... \quad y_n)$.

Ma trận có số hàng bằng số cột gọi là ma trận vuông. Ma trận vuông có n hàng gọi là ma trận vuông cấp n: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = [a_{ij}]_{nxn}$.

Ma trận tam giác trên:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ a_{ij} = 0 \text{ nếu } i > j$$

* Ma trận tam giác dưới:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ a_{ij} = 0 \text{ nếu } j > i$$

Ma trận đơn vị cấp n ký hiệu là $\mathbf{I}_n$ hay **I:** $\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$

❖ ***Các phép toán về ma trận***

i) Ma trận bằng nhau: Cho các ma trận $A = [a_{ij}]_{mxn}$, $B = [b_{ij}]_{mxn}$

$$\boxed{A = B \overset{ĐN}{\Leftrightarrow} a_{ij} = b_{ij} \ ; \ \forall \ i = \overline{1, m} \ ; \ j = \overline{1, n}}$$

ii) phép cộng, trừ các ma trận cùng cấp: Cho $A = [a_{ij}]_{mxn}$, , $B = [b_{ij}]_{mxn}$

$$A + B \overset{ĐN}{=} [a_{ij} + b_{ij}]_{mxn} \quad ; \quad A - B \overset{ĐN}{=} [a_{ij} - b_{ij}]_{mxn}$$

iii) Phép nhân một số với một ma trận: Cho $A = [a_{ij}]_{mxn}$, $\alpha \in R$

$$\alpha A \overset{ĐN}{=} [\alpha a_{ij}]_{mxn}$$

iv)Phép nhân hai ma trận có cấp thích hợp:(số cột ma trận trước phải bằng số hàng ma trận sau)

Cho các ma trận $A = [a_{ij}]_{mxn}$, $B = [b_{ij}]_{nxp}$

$$AB \overset{ĐN}{=} \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}\right]_{mxp}$$

v) Phép chuyển vị: Ma trận chuyển vị của $A = [a_{ij}]_{mxn}$, ký hiệu A^T, $A^T \overset{ĐN}{=} [a^T_{ji}]_{nxm}$ với $a^T_{ji} = a_{ij}$, tức là A^T có được từ A bằng cách chuyển hàng thành cột.

❖ ***Phép biến đổi sơ cấp hàng của ma trận***

Có 3 loại phép biến đổi sơ cấp hàng:

Loại 1 Hoán vị hai hàng : $h_i \leftrightarrow h_j$

Loại 2 Nhân một số khác 0 vào một hàng : $\alpha h_i \rightarrow h_i$, $\alpha \neq 0$

Loại 3 Thay một hàng bởi hàng đó cộng với α lần hàng khác:

$h_i + \alpha h_j \rightarrow h_i$, $i \neq j$.

Kết hợp loại 2 và loại 3 ta được : $\alpha h_i + \beta h_j \rightarrow h_i$, $\alpha \neq 0$, $i \neq j$.

2. *Hệ phương trình tuyến tính*

Một hệ phương trình tuyến tính trên R là hệ thống gồm m phương trình bậc nhất (n ẩn số) có dạng tổng quát như sau:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \text{(I)} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B}$$

$$\Leftrightarrow AX = B$$

Trong đó $a_{ij} \in R$ (gọi là các hệ số) và $b_i \in R$ (gọi là các hệ số tự do) là các số cho trước, các x_j là các ẩn cần tìm (trong R).

- Ma trận A gọi là ma trận hệ số của hệ phương trình (I).
- Ma trận B gọi là ma trận cột các hệ số tự do.
- Ma trận X gọi là ma trận cột các ẩn số.

- Ma trận $\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}.........a_{1n} : b_1 \\ a_{21} & a_{22}........a_{2n} : b_2 \\ \multicolumn{2}{l}{..............................} \\ a_{m1} & a_{m2}.......a_{mn} : b_m \end{pmatrix} = (A \mid B)$ gọi là ma trận hệ số bổ sung của hệ phương trình tuyến tính (I) hoặc gọi tắt là ma trận bổ sung.
- Nghiệm của hệ (I) là bộ số (c_1 , c_2, ..., c_n) sao cho khi thay x_i bởi c_i thì tất cả các phương trình của hệ đều thỏa.
- Hai hệ phương trình tuyến tính gọi là ***tương đương*** nếu chúng ***có cùng tập hợp nghiệm***.
- Một hệ phương trình tuyến tính gọi là ***tương thích*** nếu nó ***có nghiệm***.

❖ **<u>Định lý Cronecker - Capelli</u>** (n là số ẩn số của hệ phương trình)

i) $r(A) = r(\overline{A}) = n \Leftrightarrow$ HPT (I) có nghiệm duy nhất.

ii) $r(A) = r(\overline{A}) < n \Leftrightarrow$ HPT (I) có vô số nghiệm.(khi đó có n-r(A) ẩn số tự do)

iii) $r(A) < r(\overline{A}) \Leftrightarrow$ HPT (I) vô nghiệm.

iv) $r(A) = r(\overline{A}) \Leftrightarrow$ HPT (I) có nghiệm (hệ tương thích).

3. Không gian vectơ $\mathbb{R}^m$

Không gian vectơ $\mathbb{R}^m$ là tập $\mathbb{R}^m = \{x = (x_1, x_2, ..., x_m) / x_i \in R, i = \overline{1,m}\}$ với phép cộng vectơ và phép nhân một số với một vectơ như sau:

$\forall\, x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$, $y = (y_1, y_2, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$

- Phép cộng vectơ: $x + y \overset{ĐN}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_m + y_m)$.
- Phép nhân một số với một vectơ: $\alpha x \overset{ĐN}{=} (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_m)$.

Mỗi vectơ x $= (x_1, x_2, ..., x_m)$ còn gọi là *vectơ m chiều*. Vectơ không hay vectơ zero là $0 = (0, 0, ..., 0)$.

♦ *Tổ hợp tuyến tính*: Vectơ x gọi là tổ hợp tuyến tính của các vectơ u_1, u_2, ..., u_n nếu và chỉ nếu tồn tại các số $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in R$ sao cho

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n$$

♦ *Phụ thuộc tuyến tính:* Các vectơ u_1, u_2, ..., u_n gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu và chỉ nếu tồn tại các số $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in R$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n = 0$$

♦ *Độc lập tuyến tính:* Các vectơ u_1, u_2, ..., u_n gọi là độc lập tuyến tính nếu và chỉ nếu : $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$

♦ *Cơ sở:* Các vectơ $u_1, u_2, ..., u_m$ gọi là cơ sở của không gian vectơ $\mathbb{R}^m$ nếu và chỉ nếu chúng độc lập tuyến tính và mọi vectơ $x \in \mathbb{R}^m$ đều là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $u_1, u_2, ..., u_m$.

♦ Tích vô hướng Euclide trong $\mathbb{R}^m$ là tích vô hướng được định nghĩa như sau:

$\forall x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$, $y = (y_1, y_2, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$

$$<x,y> \overset{\text{ĐN}}{=} x_1 y_1 + x_2 y_2 + ...+ x_m y_m$$

♦ Chuẩn hay độ dài vectơ x, ký hiệu $\|x\|$: $\|x\| \overset{\text{ĐN}}{=} \sqrt{<x,x>}$

♦ Không gian $\mathbb{R}^m$ với tích vô hướng như trên là một không gian Euclide.

♦ Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^m$, các vectơ cột $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ..., $e_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ lần lượt gọi là vectơ đơn vị thứ 1, 2, ..., m.

4. Hệ phương trình tuyến tính chuẩn

Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (\text{I'}) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B}$$

Hệ (I') gọi là ***hệ phương trình tuyến tính chuẩn*** nếu từ ma trận A, ta có thể chọn ra m cột và sắp xếp lại để được một ma trận đơn vị cấp m.

<u>Ví dụ 1</u>

a) Hệ $\begin{cases} x_1 & & & +10x_4 & -2x_5 & =1 \\ & x_2 & & -15x_4 & +3x_5 & =2 \\ & & x_3 & +3x_4 & -7x_5 & =-3 \end{cases}$ là hệ phương trình chuẩn vì ma trận

hệ số A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -15 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ có các cột 1, 2, 3 sắp thành ma trận đơn vị.

b) Hệ $\begin{cases} x_1 + & \cdots & +a_{1\,m+1}x_{m+1} & +\cdots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\ x_2 + & \cdots & +a_{2\,m+1}x_{m+1} & +\cdots & +a_{2n}x_n & =b_2 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & x_m & +a_{m\,m+1}x_{m+1} & +\cdots & +a_{mn}x_n & =b_m \end{cases}$ là hệ phương trình chuẩn vì ma trận hệ số A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1\,m+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2\,m+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m\,m+1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ có các cột 1,2,..., m sắp thành ma trận đơn vị.

c) Hệ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_4 + x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 + x_6 = 3 \end{cases}$ là hệ phương trình chuẩn vì ma trận hệ số A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ có các cột 5, 3, 6 sắp thành ma trận đơn vị.

❖ **<u>Ẩn cơ bản-Nghiệm cơ bản</u>**

♦ Xét hệ phương trình chuẩn (I') ở trên. Khi đó, ẩn ứng với các véctơ cột đơn vị của ma trận A gọi là ***ẩn cơ bản*** (ẩn cơ sở); các ẩn khác gọi là ẩn không cơ bản. Ẩn cơ bản ứng với vectơ đơn vị thứ i gọi là ẩn cơ bản thứ i. Sắp xếp các ẩn cơ bản theo thứ tự các vectơ đơn vị 1, 2, ..., m ta được ***hệ ẩn cơ bản***. Cần lưu ý là nếu có nhiều ẩn ứng với cùng một véctơ cột đơn vị thì chỉ chọn một ẩn làm ***ẩn cơ bản,*** các ẩn còn lại là ẩn không cơ bản.

♦ Nghiệm của một hệ phương trình chuẩn mà các ẩn không cơ bản đều bằng 0 gọi là ***nghiệm cơ bản***. Nói cách khác, ***nghiệm cơ bản*** của một hệ phương trình tuyến tính chuẩn là nghiệm nhận được từ dạng nghiệm tổng quát khi cho các ẩn không cơ bản nhận giá trị 0.

<u>Ví dụ 2</u>

a) Hệ phương trình chuẩn : $\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 10x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 - 15x_4 = 2 \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = -3 \end{cases}$ có các ẩn cơ bản thứ 1, 2, 3 lần lượt là x_1, x_2, x_5 và hệ ẩn cơ bản là (x_1, x_2, x_5); các ẩn không cơ bản là x_3, x_4. Một nghiệm cơ bản của hệ là (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 2, 0, 0, -3).

b) Hệ phương trình chuẩn $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_4 + x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 + x_6 = 3 \end{cases}$ có các ẩn cơ bản thứ 1, 2, 3 lần lượt là x_5, x_3, x_6 và hệ ẩn cơ bản là (x_5, x_3, x_6); các ẩn không cơ bản là x_1, x_2, x_4. Một nghiệm cơ bản của hệ là (x_1,x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0,0,4,0,2, 3).

❖ **<u>Phép khử Gauss- Jordan</u>** Xét hệ phương trình chuẩn

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \quad + 10x_4 \quad = 2 \\ \quad x_2 + x_3 - 15x_4 \quad = 1 \\ \quad x_2 \quad + 3x_4 + x_5 = -3 \end{cases}$$ có các ẩn cơ bản là x_1, x_3, x_5 và hệ ẩn cơ bản là (x_1, x_3, x_5); các ẩn không cơ bản là x_2, x_4. Nghiệm cơ bản ban đầu là (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 0, 1, 0, -3).

Ma trận bổ sung của hệ là

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 10 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -15 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{h_2 - h_1;\, h_3 - h_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 10 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -25 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -7 & 1 & -5 \end{array}\right) = A^*$$

Hệ phương trình chuẩn ứng với ma trận bổ sung A^* có các ẩn cơ bản là x_2, x_3, x_5 và hệ ẩn cơ bản là (x_2, x_3, x_5); các ẩn không cơ bản là x_1, x_4. Nghiệm cơ bản mới của hệ là (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 2, -1, 0, -5).

Phép biến đổi ma trận bổ sung như trên gọi là ***phép khử Gauss-Jordan*** với ***phần tử trục xoay*** là a_{12}. Phép khử này biến cột 2 thành cột vectơ đơn vị thay cho cột 1 đồng thời giữ nguyên hai cột vectơ đơn vị là cột 3 và cột 5, đưa ẩn x_1 ra khỏi hệ ẩn cơ bản và ẩn x_2 vào trong hệ ẩn cơ bản.

5. Khái niệm tập lồi, điểm cực biên

❖ Đường thẳng, đoạn thẳng, siêu phẳng, nửa không gian

♦ Cho hai điểm a, b trong không gian Euclide $\mathbb{R}^n$. *Đường thẳng* qua hai điểm a, b là tập tất cả các điểm x trong $\mathbb{R}^n$ có dạng:

$$x = \lambda a + (1-\lambda)b\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Nếu $0 \le \lambda \le 1$ thì ta có *đoạn thẳng* nối hai điểm a và b. Khi đó, mọi điểm $x = \lambda a + (1-\lambda)b$ với $0 < \lambda < 1$ đều là điểm trong của đoạn thẳng nối a và b.

♦ Một *siêu phẳng* trong $\mathbb{R}^n$ là tập tất cả điểm $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn phương trình tuyến tính: $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $a_i \in \mathbb{R}$

Trong không gian 2 chiều siêu phẳng là một đường thẳng; trong không gian 3 chiều siêu phẳng là một mặt phẳng.

♦ Một *nửa không gian đóng* trong $\mathbb{R}^n$ là tập tất cả điểm $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn bất phương trình tuyến tính: $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \le \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $a_i \in \mathbb{R}$

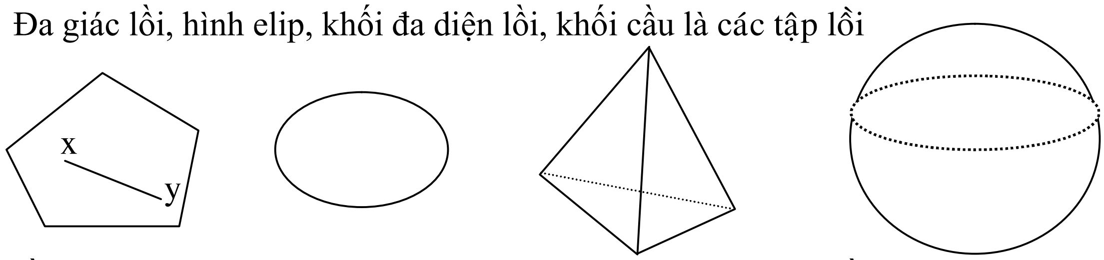
♦ Một *nửa không gian mở* trong $\mathbb{R}^n$ là tập tất cả điểm $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn bất phương trình tuyến tính: $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n < \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $a_i \in \mathbb{R}$

❖ Tập lồi (convex set)

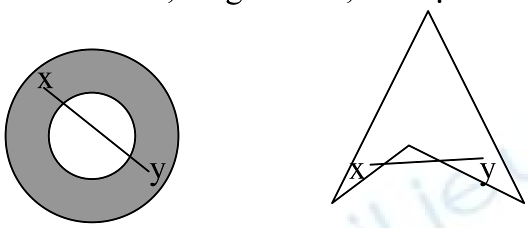
Tập $C \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là tập lồi nếu : $\forall x, y \in C$, $0 \le \lambda \le 1 \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in C$. Tức là nếu C chứa hai điểm nào đó thì C phải chứa cả đoạn thẳng nối hai điểm đó.

Ví dụ 3

a) Đa giác lồi, hình elip, khối đa diện lồi, khối cầu là các tập lồi



b) Hình vành khăn, đa giác lõm, đa diện lõm, đường elip, mặt cầu là các tập không lồi



❖ **Điểm cực biên** Điểm x^* của tập C gọi là điểm cực biên nếu trong C không có đoạn thẳng nào nhận x^* là điểm trong.

Ví dụ 4

a) Hình đa giác lồi có các điểm cực biên chính là các đỉnh của nó.
b) Hình đa diện lồi có các điểm cực biên chính là các đỉnh của nó.
c) Hình elip đóng có các điểm cực biên là mọi điểm thuộc đường biên của nó.
d) Hình cầu đóng có các điểm cực biên là mọi điểm thuộc mặt cầu biên của nó.

Bài tập

Bài 0.1 Cho hệ phương trình chuẩn : $\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 + x_4 + x_5 = -2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_5 = 4 \\ x_1 - 3x_3 - x_5 + x_6 = -3 \end{cases}$

a) Tìm hệ ẩn cơ bản, nói rõ thứ tự các ẩn cơ bản.
b) Tìm nghiệm cơ bản ban đầu.
c) Tìm hai hệ ẩn cơ bản mới và hai nghiệm cơ bản mới. (*áp dụng phép khử Gauss-Jordan*)

Bài 0.2 Chứng minh rằng số nghiệm cơ bản của một hệ phương trình tuyến tính chuẩn là hữu hạn.

Bài 0.3

a) Chứng minh rằng giao của hai tập lồi là một tập lồi. Suy ra giao của một số hữu hạn tập lồi là tập lồi.
b) Hãy lấy một ví dụ chứng tỏ rằng hợp của hai tập lồi có thể không là một tập lồi.

Bài 0.4 Tìm ba nghiệm cơ bản của các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 10x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 - 15x_4 = 2 \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_5 = 4 \\ x_2 - 3x_3 + 2x_5 + x_6 = 3 \end{cases}$

Câu hỏi trắc nghiệm

(chọn một trong 4 câu : A, B, C, D)

Câu 1

Cho hệ phương trình tuyến tính : $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ (I). Gọi A là ma trận hệ số và $\overline{A}$ là ma trận hệ số bổ sung của hệ phương trình (I). Khẳng định nào sau đây sai?

A) $r(A) = r(\overline{A}) \Leftrightarrow$ HPT (I) có nghiệm .

B) $r(A) = r(\overline{A}) < n \Leftrightarrow$ HPT (I) có vô số nghiệm.

C) $r(A) < r(\overline{A}) \Leftrightarrow$ HPT (I) vô nghiệm.

D) Nếu A là ma trận vuông và detA = 0 thì hệ (I) vô nghiệm.

Câu 2 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Mọi hệ phương trình tuyến tính chuẩn đều có nghiệm.

B) Mọi hệ phương trình tuyến tính có số phương trình nhiều hơn số ẩn số đều vô nghiệm.

C) Trong một nghiệm cơ bản của hệ phương trình tuyến tính chuẩn thì mọi ẩn không cơ bản đều nhận giá trị 0.

D) Số nghiệm cơ bản của một hệ phương trình tuyến tính chuẩn hữu hạn.

Câu 3 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Giao của hai tập lồi là một tập lồi.

B) Mọi điểm biên của một tập lồi đều là điểm cực biên.

C) Mọi điểm cực biên của một tập lồi đều là điểm biên.

D) Mọi đa giác lồi đều là tập lồi.

Câu 4 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Giao của một số hữu hạn tập lồi là tập lồi.

B) Trong không gian, mọi đa diện lồi đều là tập lồi.

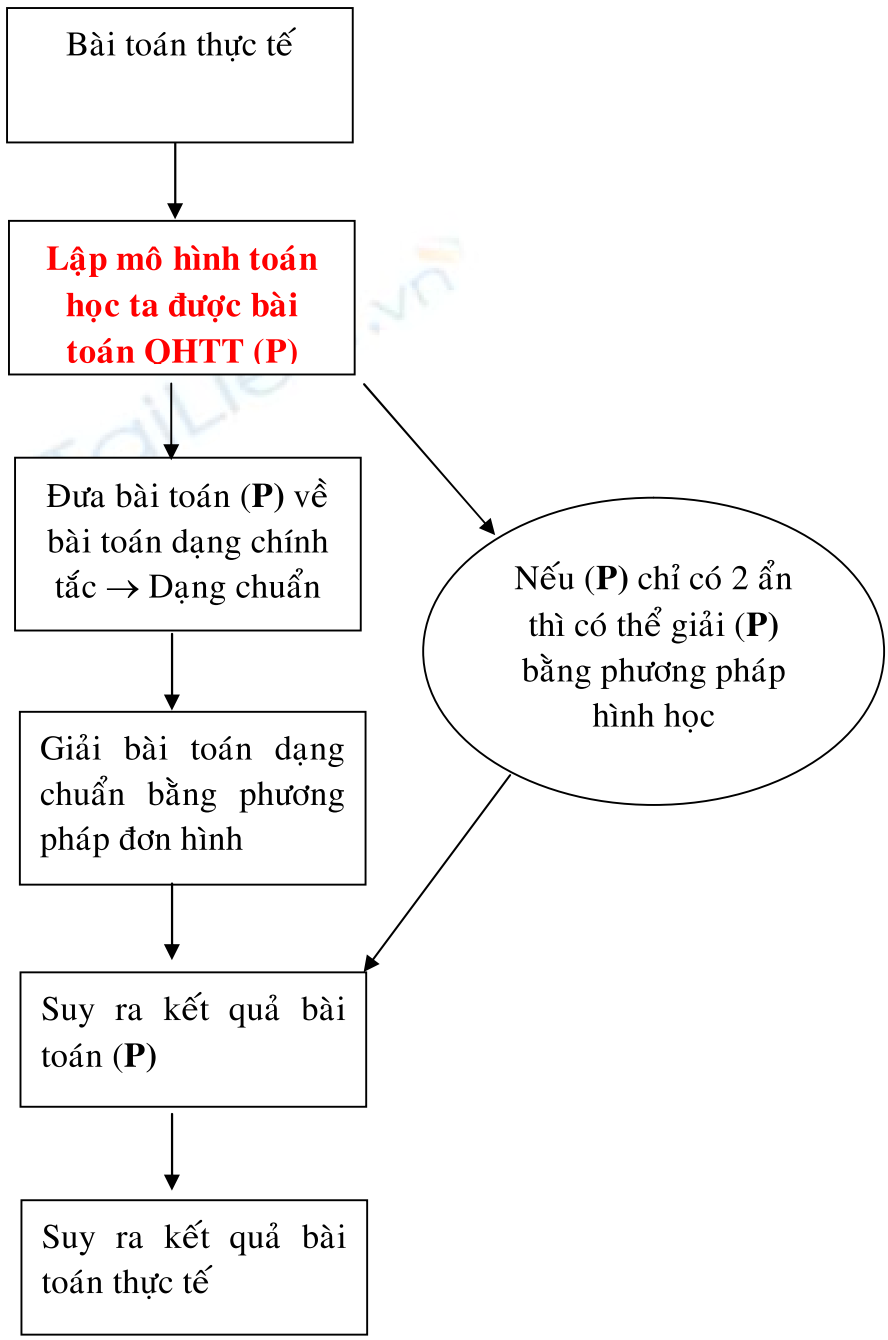
C) Trong không gian, mọi đỉnh của đa diện lồi đều là điểm cực biên.

D) Mặt cầu là tập lồi.

Chương 1

BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Sơ đồ sau đây cho biết cấu trúc logic của chương 1 và yêu cầu tối thiểu đối với sinh viên là phải làm được tất cả các việc chỉ ra trong sơ đồ.



§ 1. CÁC VÍ DỤ DẪN ĐẾN BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH-LẬP MÔ HÌNH TOÁN HỌC

Trong bài này, thông qua một số bài toán cụ thể, bạn sẽ học cách phân tích định tính và định lượng rồi từ đó lập mô hình toán học cho một số vấn đề thực tế.

1.1. Các ví dụ

Ví dụ 1 (bài toán lập kế hoạch sản xuất)

Một xí nghiệp có 3000 đơn vị nguyên liệu loại A, 5000 đơn vị nguyên liệu loại B, 2000 đơn vị nguyên liệu loại C. Các nguyên liệu trên dùng để sản xuất 4 loại hàng hóa : I, II, III, IV. Định mức nguyên liệu cần thiết và lợi nhuận khi sản xuất một đơn vị sản phẩm mỗi loại được cho trong bản sau đây:

	I	II	III	IV
A	12	5	15	6
B	14	8	7	9
C	17	13	9	12
Lợi nhuận	5	8	4	6

Hãy lập mô hình bài toán xác định phương án sản xuất đạt lợi nhuận cao nhất.

Giải

Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 lần lượt là số đơn vị sản phẩm loại I, II, III, IV cần sản xuất. Theo đề bài ta có:

♦ Tổng lợi nhuận cao nhất: $5x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 6x_4 \rightarrow \max$

♦ Lượng nguyên liệu tiêu thụ không vượt quá số lượng nguyên liệu hiện có:

$$\begin{cases} 12x_1 + 5x_2 + 15x_3 + 6x_4 \le 3000 \\ 14x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 9x_4 \le 5000 \\ 17x_1 + 13x_2 + 9x_3 + 12x_4 \le 2000 \end{cases}$$

♦ Số đơn vị sản phẩm mỗi loại không âm : $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$

♦ Nếu sản phẩm là thành phẩm như bàn, ghế, quần áo, tàu, xe, máy móc,..thì cần có thêm điều kiện số sản phẩm là số nguyên.

Tóm lại ta có bài toán

Tìm (x_1, x_2, x_3, x_4) sao cho thỏa mãn:

(1) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 5x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 6x_4 \rightarrow \max$

(2) $$\begin{cases} 12x_1 + 5x_2 + 15x_3 + 6x_4 \le 3000 \\ 14x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 9x_4 \le 5000 \\ 17x_1 + 13x_2 + 9x_3 + 12x_4 \le 2000 \end{cases}$$

(3) $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$ (có thể cần thêm điều kiện nguyên)

Ví dụ 2 (bài toán cắt vật liệu)

Một công ty may mặc cần sản xuất 5000 quần và ít nhất 3000 áo. Mỗi tấm vải có 6 cách cắt với số lượng quần áo tương ứng được cho trong bảng sau:

Cách cắt	**Quần**	**Áo**
1	90	35
2	80	55
3	70	70
4	60	90
5	120	0
6	0	100

Hãy lập mô hình bài toán tìm phương án cắt quần áo sao cho tổng số tấm vải sử dụng là ít nhất?

Giải

Gọi $x_1, x_2, ..., x_6$ lần lượt là số tấm vải cắt theo cách 1, 2,..., 6. Theo đề bài ta có :

- Tổng số tấm vải sử dụng là ít nhất : $x_1 + x_2 + ... + x_6 \to \min$
- Yêu cầu cần sản xuất 5000 quần : $90x_1 + 80x_2 + 70x_3 + 60x_4 + 120x_5 = 5000$
- Yêu cầu cần sản xuất ít nhất 3000 áo : $35x_1 + 55x_2 + 70x_3 + 90x_4 + 100x_6 \ge 3000$
- Số tấm vải sử dụng cho mỗi cách cắt không âm và nguyên vì mỗi cách cắt cần sử dụng số nguyên tấm vải: $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_6 \ge 0$ và nguyên.

Tóm lại ta có bài toán

Tìm $(x_1, x_2, ..., x_6)$ sao cho thỏa mãn:

(1) $f(x_1, x_2, ..., x_6) = x_1 + x_2 + ... + x_6 \to \min$

(2) $\begin{cases} 90x_1 + 80x_2 + 70x_3 + 60x_4 + 120x_5 = 5000 \\ 35x_1 + 55x_2 + 70x_3 + 90x_4 + 100x_6 \ge 3000 \end{cases}$

(3) $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_6 \ge 0$ và nguyên

Ví dụ 3 (bài toán dinh dưỡng)

Để nuôi một loại gia súc trong một ngày (24 giờ) cần có khối lượng tối thiểu các chất đạm, đường và chất khoáng tương ứng là 180 gam, 120 gam và 60 gam. Trên thị trường hiện có bán 3 loại thức ăn A , B, C với tỷ lệ các chất trong một kg thức ăn được cho trong bảng sau (đơn vị là gam) :

Chất bổ / Thức ăn	Đạm	Đường	Khóang
A	10	30	2
B	20	40	1
C	25	20	3

Biết chi phí để mua mỗi kg thức ăn A, B, C tương ứng là 3000 đồng, 5000 đồng, 3500 đồng. Hãy lập mô hình bài toán tìm phương án mua thức ăn các loại A, B, C sau cho đảm bảo được nhu cầu dinh dưỡng tối thiểu với chi phí thấp nhất.

Giải

Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là lượng thức ăn A, B, C cần mua (đơn vị là kg). Theo đề bài ta có:

♦ Tổng chi phí thấp nhất : $3000x_1 + 5000x_2 + 3500x_3 \to \min$

♦ Bảo đảm nhu cầu dinh dưỡng tối thiểu : $\begin{cases} 10x_1 + 20x_2 + 25x_3 \geq 180 \\ 30x_1 + 40x_2 + 20x_3 \geq 120 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 60 \end{cases}$

♦ Số lượng thức ăn mỗi loại cần mua không âm : $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

Tóm lại ta có bài toán

Tìm (x_1, x_2, x_3) sao cho thỏa mãn:

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = 3000x_1 + 5000x_2 + 3500x_3 \to \min$

(2) $\begin{cases} 10x_1 + 20x_2 + 25x_3 \geq 180 \\ 30x_1 + 40x_2 + 20x_3 \geq 120 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 60 \end{cases}$

(3) $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

Ví dụ 4 (bài toán vận tải)

Có m nơi $A_1, A_2,..., A_m$ cung cấp một loại mặt hàng nào đó với khối lượng tương ứng là $a_1, a_2,..., a_m$. Cùng lúc đó có n nơi $B_1, B_2,..., B_n$ tiêu thụ loại hàng đó với khối lượng yêu cầu tương ứng là $b_1, b_2,..., b_n$ (*đơn vị khối lượng tính bằng tấn*). Ta gọi A_i là điểm phát hàng thứ i $\left(i = \overline{i,m}\right)$ và B_j là điểm thu hàng thứ j $\left(j = \overline{1,n}\right)$.

Giả sử tổng lượng hàng cần phát đi ở các điểm phát bằng tổng lượng hàng thu về ở các điểm thu $\left(\sum a_i = \sum b_j\right)$, tức là bài tóan *cân bằng thu phát.*

Cho biết chi phí chuyên chở một tấn hàng từ A_i đến B_j là c_{ij} đồng. Ma trận $C = \left(c_{ij}\right)_{m\times n}$ gọi là ma trận cước phí.

Hãy lập kế hoạch vận chuyển từ mỗi điểm phát đến mỗi điểm thu bao nhiêu tấn hàng để:

- Các điểm phát đều phát hết hàng.
- Các điểm thu đều nhận đủ hàng yêu cầu.
- Tổng cước phí phải trả là ít nhất.

Giải

∗ ***Phân tích bài toán:*** Đặt x_{ij} là số tấn hàng chuyển từ A_i đến B_j.

a) Tất nhiên $x_{ij} \geq 0\left(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}\right)$

b) Tổng lượng hàng phát đi từ A_i đến tất cả các B_j là:

$$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{ij} + \ldots + x_{in} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

Vì các điểm phát phải phát hết hàng nên ta có : $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right)$

c) Tổng lượng hàng thu về B_j từ tất cả các A_i là:

$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{ij} + \ldots + x_{mj} = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$$

Vì các điểm thu phải thu đủ hàng nên ta có : $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \left(j = \overline{1,n}\right)$

d) Tổng cước phí phải trả: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$. Tổng này càng nhỏ càng tốt.

Từ các phân tích trên, ta có mô hình bài toán:

(1) $f(x) = \sum_{i}\sum_{j} c_{ij}x_{ij} \to \min$

(2) $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \left(i = \overline{1,m}\right) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \left(i = \overline{1,n}\right) \end{cases}$

(3) $x_{ij} \geq 0 \left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right)$

Ví dụ 5 (bài toán kiểm soát ô nhiễm)

Một công ty cement sản xuất mỗi năm 2.500.000 thùng cement. Khi sản xuất mỗi thùng cement sinh ra 2 kg bụi. Công ty được yêu cầu sử dụng thiết bị lọc bụi: thiết bị A lọc được 1,5 kg bụi/thùng cement, chi phí hoạt động là 1.400 đồng/thùng; thiết bị B lọc được 1,8 kg bụi/thùng cement, chi phí hoạt động là 1.800 đồng/thùng . Công ty được yêu cầu phải giảm bớt ít nhất 4.200.000 kg bụi mỗi năm. Hỏi công ty nên sử dụng mỗi loại thiết bị lọc như thế nào để đạt yêu cầu và chi phí thấp nhất? Hãy lập mô hình toán học của bài toán này.

Giải

Gọi x, y lần lượt là số thùng cement sử dụng thiết bị lọc bụi A, B mỗi năm. Theo đề bài ta có:

- Tổng chi phí thấp nhất: $1.400x + 1.800y \to \min$.
- Số thùng cement có sử dụng thiết bị lọc bụi không vượt qua số thùng cement sản xuất : $x + y \leq 2.500.000$
- Công ty được yêu cầu phải giảm bớt ít nhất 4.200.000 kg bụi mỗi năm:

  $1,5x + 1,8y \geq 4.200.000$
- Số thùng cement có sử dụng thiết bị lọc bụi mỗi loại không âm: $x \geq 0$, $y \geq 0$

Tóm lại ta có bài toán

(1) $f(x,y) = 1.400x + 1.800y \to \min$

(2) $\begin{cases} x + y \le 2.500.000 \\ 1,5x + 1,8y \ge 4.200.000 \end{cases}$

(3) $x \ge 0,\ y \ge 0$

Ví dụ 6 (Bài toán lập kế hoạch sản xuất)

Hãy lập mô hình toán học của bài toán sau đây.

Một công ty may mặc ký hợp đồng giao cho khách hàng 260.000 bộ quần áo trong thời gian 1 tháng. Công ty có ba xí nghiệp A, B, C và quần áo phải được sản xuất và đóng gói thành bộ tại mỗi xí nghiệp. Năng lực sản xuất trong một tháng và chi phí sản xuất đối với mỗi bộ quần áo của các xí nghiệp trong thời gian thường trong thời gian tăng ca được cho trong bảng sau:

Xí nghiệp / Thờigian SX	Xí nghiệp A		Xí nghiệp B		Xí nghiệp C	
	Năng lực sản xuất	Chi phí	Năng lực sản xuất	Chi phí	Năng lực sản xuất	Chi phí
Thời gian thường	90.000 bộ/tháng	73.000 đồng/bộ	50.000 bộ/tháng	74.500 đồng/bộ	80.000 bộ/tháng	74.000 đồng/bộ
Thời gian tăng ca	40.000 bộ/tháng	74.200 đồng/bộ	22.000 bộ/tháng	75.500 đồng/bộ	35.000 bộ/tháng	75.000 đồng/bộ

Biết rằng số bộ quần áo sản xuất tại hai xí nghiệp B và C phải ít nhất là 156.000 bộ. Hỏi phải phân công sản xuất cho các xí nghiệp như thế nào để hoàn thành hợp đồng với chi phí thấp nhất.

Giải

Gọi: x_1, x_2 lần lượt là số bộ quần áo sản xuất trong thời gian thường và thời gian tăng ca tại xí nghiệp A trong một tháng; y_1, y_2 lần lượt là số bộ quần áo sản xuất trong thời gian thường và thời gian tăng ca tại xí nghiệp B trong một tháng; z_1, z_2 lần lượt là số bộ quần áo sản xuất trong thời gian thường và thời gian tăng ca tại xí nghiệp C trong một tháng.

Ta có:

- Tổng chi phí sản xuất bé nhất:
  $73.000x_1 + 74.200x_2 + 74.500y_1 + 75.500y_2 + 74.000z_1 + 75.000z_2 \to \min$
- Cần sản xuất đủ 260.000 để giao cho khách hàng:
  $x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2 = 260.000$
- Số bộ quần áo sản xuất phải không âm và nguyên: $x_1 \ge 0$ và x_1 nguyên, $x_2 \ge 0$ và x_2 nguyên, $y_1 \ge 0$ và y_1 nguyên, $y_2 \ge 0$ và y_2 nguyên, $z_1 \ge 0$ và z_1 nguyên, $z_2 \ge 0$ và z_2 nguyên.

- Số bộ quần áo sản xuất trong thời gian thường và thời gian tăng ca tại mỗi xí nghiệp không vượt quá năng lực sản xuất của xí nghiệp đó: $x_1 \le 90.000$, $x_2 \le 40.000$, $y_1 \le 50.000$, $y_2 \le 22.000$, $z_1 \le 80.000$, $z_2 \le 35.000$.
- Số bộ quần áo sản xuất tại hai xí nghiệp B và C phải ít nhất là 156.000 bộ: $y_1 + y_2 + z_1 + z_2 \ge 156.000$

Tóm lại ta có mô hình bài toán là tìm $x_1, x_2, y_1, y_2,\ z_1, z_2$ sao cho:

(1) $73.000x_1 + 74.200x_2 + 74.500y_1 + 75.500y_2 + 74.000z_1 + 75.000z_2 \to \min$

$$(2)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2 = 260.000 \\ x_1 \le 90.000; x_2 \le 40.000 \\ y_1 \le 50.000; y_2 \le 22.000 \\ z_1 \le 80.000; z_2 \le 35.000 \\ y_1 + y_2 + z_1 + z_2 \ge 560.000 \end{cases}$$

(3) $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, z_1 \ge 0, z_2 \ge 0$ và $x_1, x_2, y_1,\ y_2,\ z_1,\ z_2$ nguyên

Ví dụ 7 (Bài toán lập kế hoạch sản xuất)

Hãy lập mô hình toán học của bài toán sau đây.

Một công ty may mặc cần sản xuất 3 loại sản phẩm may mặc là ***A, B, C*** và mỗi sản phẩm này đều phải qua 3 công đoạn là ***công đoạn 1***, ***công đoạn 2***, ***công đoạn 3***. ***Chi phí sản xuất trung bình*** (gồm tất cả chi phí như nguyên liệu, nhân lực,...) đối với mỗi sản phẩm, giá bán tương ứng của mỗi sản phẩm, tổng số giờ lao động ứng với mỗi công đoạn mà công ty có được trong một tuần và định mức tiêu hao số giờ lao động của mỗi sản phẩm ứng với mỗi công đoạn được cho trong bảng sau:

	Định mức tiêu hao số giờ lao động của mỗi sản phẩm ứng với mỗi công đoạn			Tổng số giờ lao động ứng với ***mỗi công đoạn*** mà công ty có được trong 1 tuần
	A	***B***	***C***	
Công đoạn 1	3	2,5	2	350 giờ (CĐ1)
Công đoạn 2	5	3	5	650 giờ (CĐ2)
Công đoạn 3	4	2	3	400 giờ (CĐ3)
Chi phí sản xuất trung bình mỗi sản phẩm	\$6	\$5,5	\$5	
Giá bán mỗi sản phẩm	\$11	\$9	\$8,5	

Biết các sản phẩm sản xuất ra đều có thể bán hết với điều kiện số sản phẩm ***A*** không được vượt quá tổng của số sản phẩm ***B*** và ***C***. Hỏi mỗi tuần công ty cần sản xuất mỗi loại sản phẩm là ***A, B, C*** với số lượng tương ứng bao nhiêu để ***lợi nhuận trung bình lớn nhất***?

Giải

Gọi x, y, z là số sản phẩm loại A, B, C mà công ty cần sản xuất mỗi tuần.

Lợi nhuận lớn nhất: $f(x,y,z) = (11-6)x + (9-5,5)y + (8,5-5)z \to \max$

Số giờ lao động sử dụng *mỗi công đoạn* không vượt quá tổng số giờ lao động *mỗi công đoạn* mà công ty có được trong 1 tuần:

Công đoạn 1: $3x + 2,5y + 2z \le 350$

Công đoạn 2: $5x + 3y + 5z \le 650$

Công đoạn 3: $4x + 2y + 3z \le 400$

Số sản phẩm loại A không vượt quá tổng số sản phẩm loại B và C: $x \le y + z$

Số sản phẩm mỗi loại không âm và nguyên: $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$ và x, y, z nguyên

Tóm lại ta có mô hình bài toán là là tìm các số x, y, z sao cho:

(1) $f(x,y,z) = 5x + 3,5y + 2,5z \to \max$

(2) $\begin{cases} 3x & +2,5y & +2z & \le & 350 \\ 5x & +3y & +5z & \le & 650 \\ 4x & +2y & +3z & \le & 400 \\ & x & \le & y & +z \end{cases}$

(3) $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$ và x, y, z nguyên

1.2. *Quy tắc vàng khi lập mô hình toán học bài toán thực tế và khái niệm tối ưu*:

Mỗi ý diễn đạt bằng ngôn ngữ thông thường phải được diễn đạt tương đương bằng ngôn ngữ toán học. Ngôn ngữ thông thường đôi khi bất định (không tường minh, không rõ ràng, mờ, ngẫu nhiên,…) nên khi lập mô hình cần chú ý đến yếu tố này (định tính, định lượng,…).

Cuộc sống luôn nảy sinh những vấn đề (bài toán) cần giải quyết. Mỗi khi giải quyết một vấn đề, sau khi đã tìm ra một phương án, chúng ta thường hài lòng ngay với phương án vừa tìm được, mà ít nghĩ rằng vấn đề còn có thể giải quyết bằng phương án khác tốt hơn. Như vậy, khi tìm phương án để giải quyết một vấn đề, chúng ta phải tìm phương án tốt nhất (nếu có thể). ***Phương án tốt nhất để giải quyết một vấn đề với một số điều kiện, ràng buộc cho trước gọi là phương án tối ưu.***

Mỗi vấn đề cần giải quyết luôn nằm trong một hệ thống nhất định. Bản thân hệ thống này lại nằm trong hệ thống khác lớn hơn gồm nhiều hệ thống nhỏ. Các hệ thống này chịu sự tương tác ảnh hưởng lẫn nhau theo các chiều *không gian và thời gian*. Hơn nữa, mỗi vấn đề lại chứa đựng bên trong nó những hệ thống nhỏ hơn và chúng cũng chịu sự tương tác ảnh hưởng lẫn nhau. Do đó, để bảo đảm vấn đề mà chúng ta quan tâm được giải quyết một cách chính xác, chúng ta cần phải chú ý đến tất cả những mối liên hệ và ảnh hưởng nêu trên.

1.3. Một số bước cơ bản để lập mô hình toán học và giải bài toán thực tế

- ***Bước 1*** Xây dựng mô hình định tính cho vấn đề thực tế; tức là xác định các yếu tố, ý nghĩa và qui luật mà chúng phải tuân theo. Nói cách khác là phát biểu mô hình bằng lời hay biểu đồ các điều kiện kinh tế, kỹ thuật, tự nhiên, xã hội, các mục tiêu cần đạt được,....
- ***Bước 2*** Diễn tả lại dưới dạng ngôn ngữ toán học mô hình định tính ở trên để được mô hình toán học của vấn đề đang xét. Ở bước này, ta chọn các biến phù hợp đặc trưng cho các yếu tố hoặc các đại lượng đang xét và thiết lập các phương trình, bất phương trình về mối liên hệ giữa chúng.
- ***Bước 3*** Khảo sát và giải bài toán có được ở bước 2 :
    - Sử dụng các công cụ toán học phù hợp và cụ thể hóa bằng thuật toán.
    - Nếu kích thước bài toán lớn không thể giải bằng tay thì phải sử dụng máy tính và phần mềm phù hợp.
    - Tiến hành tính toán để cho ra kết quả.
- ***Bước 4*** Phân tích và kiểm định lại kết quả có được ở bước 3. Trong bước này, cần phải xác định mức độ phù hợp của mô hình và kết quả tính toán với bài toán thực tế. Có thể xảy ra một trong hai khả năng sau:

Khả năng 1: Mô hình và kết quả tính toán phù hợp với thực tế. Khi đó ta cần lập bảng tổng kết ghi rõ cách đặt vấn đề, các bước phân tích lập mô hình, các số liệu, thuật toán và phần mềm sử dụng,.... (lập bảng tổng kết sẽ thuận tiện cho việc phản biện, triển khai thực hiện, kiểm tra đánh giá, hiệu chỉnh .....).

Khả năng 2: Mô hình và kết quả tính toán không phù hợp với thực tế. Khi đó, ta cần kiểm tra lại toàn bộ để tìm ra các nguyên nhân. Các nguyên nhân thường gặp là:

- Mô hình định tính chưa phản ánh đúng và đầy đủ thực tế. Cần xem xét lại cách đặt vấn đề và các bước phân tích để đi đến mô hình này.