

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI  
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG & TIN HỌC



TS. BÙI XUÂN DIỆU

## **Bài Giảng**

---

### **GIẢI TÍCH III**

(lưu hành nội bộ)

CHUỖI - PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN - PHƯƠNG PHÁP TOÁN TỬ LAPLACE

---

Tóm tắt lý thuyết, Các ví dụ, Bài tập và lời giải

**Hà Nội - 2019**

(bản cập nhật Ngày 22 tháng 5 năm 2019)

Tập Bài giảng vẫn đang trong quá trình hoàn thiện và có thể chứa những lỗi đánh máy, những lỗi kí hiệu và những chỗ sai chưa được kiểm tra hết. Tác giả mong nhận được sự đóng góp ý kiến để tập Bài giảng được hoàn thiện. Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về địa chỉ “[dieu.buixuan@hust.edu.vn](mailto:dieu.buixuan@hust.edu.vn)”

Warning: This lecture notes have not been reviewed and may contain errors or typos.  
Use at your own risk!

*Hà Nội, Ngày 22 tháng 5 năm 2019.*

TaiLieu.vn

---

# MỤC LỤC

---

<b>Mục lục</b>	<b>1</b>
<b>Chương 1 . Chuỗi (11LT+11BT)</b>	<b>5</b>
1 Đại cương về chuỗi số	5
2 Chuỗi số dương	12
2.1 Tiêu chuẩn tích phân	12
2.2 Các tiêu chuẩn so sánh	14
2.3 Tiêu chuẩn d’Alambert	20
2.4 Tiêu chuẩn Cauchy	22
2.5 Đọc thêm: Tiêu chuẩn d’Alambert vs Tiêu chuẩn Cauchy	24
2.6 Bài tập ôn tập	26
3 Chuỗi số với số hạng có dấu bất kì	29
3.1 Chuỗi hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ	29
3.2 Chuỗi đan dấu	31
3.3 Hội tụ tuyệt đối vs Bán hội tụ	32
3.4 Phép nhân chuỗi	34
3.5 Khi nào dùng tiêu chuẩn nào?	36
3.6 Ví dụ về chuỗi bán hội tụ không phải là chuỗi đan dấu	38
3.7 Bài tập ôn tập	40
4 Chuỗi hàm số	47
4.1 Chuỗi hàm số hội tụ	47
4.2 Chuỗi hàm số hội tụ đều	49
4.3 Các tính chất của chuỗi hàm số hội tụ đều	51
4.4 Một số chú ý về chuỗi hàm	55
4.5 Bài tập ôn tập	56
5 Chuỗi lũy thừa	58
5.1 Các tính chất của chuỗi lũy thừa	61
5.2 Khai triển một hàm số thành chuỗi lũy thừa	63

5.3	Khai triển Maclaurin một số hàm số sơ cấp . . . . .	65
5.4	Đọc thêm: Công thức Euler . . . . .	68
5.5	Ứng dụng của chuỗi lũy thừa . . . . .	70
5.6	Bài tập ôn tập . . . . .	71
6	Chuỗi Fourier . . . . .	76
6.1	Chuỗi lượng giác & chuỗi Fourier . . . . .	76
6.2	Khai triển một hàm số thành chuỗi Fourier . . . . .	77
6.3	Khai triển hàm số chẵn, hàm số lẻ . . . . .	81
6.4	Khai triển hàm số tuần hoàn với chu kỳ bất kỳ . . . . .	84
6.5	Khai triển chuỗi Fourier hàm số trên đoạn $[a, b]$ bất kì . . . . .	86
6.6	Bài tập ôn tập . . . . .	88
<b>Chương 2 . Phương trình vi phân (11 LT + 12 BT) . . . . .</b>		<b>93</b>
1	Các khái niệm mở đầu . . . . .	95
2	Phương trình vi phân cấp một . . . . .	96
2.1	Đại cương về phương trình vi phân cấp một . . . . .	96
2.2	Các phương trình khuyết . . . . .	97
2.3	Phương trình vi phân với biến số phân ly . . . . .	98
2.4	Phương trình vi phân đẳng cấp . . . . .	99
2.5	Phương trình đưa được về phương trình đẳng cấp . . . . .	99
2.6	Phương trình vi phân tuyến tính . . . . .	100
2.7	Phương trình Bernoulli . . . . .	102
2.8	Phương trình vi phân toàn phần . . . . .	103
2.9	Thừa số tích phân . . . . .	104
2.10	Bài tập ôn tập . . . . .	106
3	Phương trình vi phân cấp hai . . . . .	107
3.1	Đại cương về phương trình vi phân cấp hai . . . . .	107
3.2	Các phương trình khuyết . . . . .	107
3.3	Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai . . . . .	109
3.4	Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai có hệ số hằng số . . . . .	116
3.5	PTVP tuyến tính đưa được về PTVP tuyến tính với hệ số hằng . . . . .	120
3.6	Phương trình Euler . . . . .	121
3.7	Phương trình Chebysev . . . . .	122
3.8	Đọc thêm: Phương pháp đặc trưng giải PTVP tuyến tính cấp $n$ với hệ số hằng . . . . .	122
3.9	Bài tập ôn tập . . . . .	123
4	Đại cương về hệ phương trình vi phân cấp một . . . . .	125
4.1	Các loại nghiệm của hệ PTVP . . . . .	125
4.2	Mối liên hệ giữa PTVP cấp $n$ và hệ $n$ PTVP cấp một . . . . .	127

5	Hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp một . . . . .	128
5.1	Hệ PTVP TT cấp một thuần nhất . . . . .	128
5.2	Hệ PTVP TT cấp một không thuần nhất . . . . .	130
5.3	PP biến thiên hằng số giải hệ PTVP TT cấp một . . . . .	131
6	Hệ PTVP TT thuần nhất với hệ số hằng số . . . . .	133
6.1	Phương pháp đặc trưng . . . . .	133
6.2	Phương pháp khử . . . . .	135
6.3	Bài tập ôn tập . . . . .	137
<b>Chương 3 . Phương pháp toán tử Laplace (8 LT + 7 BT) . . . . .</b>		<b>139</b>
1	Phép biến đổi Laplace và phép biến đổi ngược . . . . .	139
1.1	Phép biến đổi Laplace . . . . .	140
1.2	Phép biến đổi Laplace nghịch đảo . . . . .	143
2	Phép biến đổi của bài toán với giá trị ban đầu . . . . .	145
2.1	Phép biến đổi của đạo hàm, nghiệm của bài toán giá trị ban đầu . . . . .	145
2.2	Phép biến đổi Laplace của hàm số $f(t)$ có dạng $f(t) = tg(t)$ . . . . .	147
2.3	Phép biến đổi Laplace của tích phân . . . . .	148
3	Phép tịnh tiến và phân thức đơn giản . . . . .	149
3.1	Phép tịnh tiến . . . . .	149
3.2	Phép biến đổi Laplace ngược của các hàm phân thức . . . . .	150
4	Đạo hàm, tích phân và tích các phép biến đổi . . . . .	154
4.1	Tích chập - Phép biến đổi Laplace của tích chập . . . . .	154
4.2	Vi phân của phép biến đổi . . . . .	156
4.3	Tích phân của phép biến đổi . . . . .	157
4.4	Phép biến đổi Laplace của hàm Heaviside và tịnh tiến trên trục . . . . .	158
4.5	Bài toán giá trị ban đầu đối với PTVP có hệ số là hàm số . . . . .	160
<b>Phụ lục . . . . .</b>		<b>163</b>
<b>Chương A . Tiêu chuẩn so sánh cho chuỗi số bất kì . . . . .</b>		<b>163</b>
<b>Chương B . Một số tiêu chuẩn hội tụ hay - độ đo - để chứng minh . . . . .</b>		<b>171</b>
<b>Chương C . Một số tiêu chuẩn hội tụ mạnh hơn d'Alembert và Cauchy. . . . .</b>		<b>175</b>
1	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ và các tiêu chuẩn mạnh hơn tiêu chuẩn d'Alembert . . . . .	175
2	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ và các tiêu chuẩn mạnh hơn tiêu chuẩn Cauchy . . . . .	178

Tailieu.vn

# CHƯƠNG 1

## CHUỖI (11LT+11BT)

### §1. ĐẠI CƯƠNG VỀ CHUỖI SỐ

**Định nghĩa 1.1.** Cho  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  là một dãy số. Tổng vô hạn

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

được gọi là một chuỗi số và được kí hiệu là  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , trong đó  $a_n$  được gọi là số hạng tổng quát và  $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$  được gọi là tổng riêng thứ  $n$ .

i) Nếu dãy số  $\{S_n\}$  là hội tụ và  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  tồn tại, thì ta nói chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  là hội tụ và có tổng bằng  $S$  và viết

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

ii) Ngược lại, ta nói chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  là phân kỳ.

**Ví dụ 1.1.** Hãy xét ví dụ trực quan đầu tiên về chuỗi số là như sau. Chúng ta bắt đầu với khoảng  $[0, 1]$ . Chia đôi khoảng này ra thì ta được hai khoảng là  $[0, 1/2]$  và  $(1/2, 1]$ , mỗi khoảng có độ dài bằng  $1/2$ . Sau đó ta lại tiếp tục chia đôi khoảng  $[0, 1/2]$ , thì ta sẽ được hai khoảng, mỗi khoảng có độ dài bằng  $1/4$ . Tiếp tục kéo dài quá trình này ta sẽ được chuỗi số sau:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

**Ví dụ 1.2.** Xét chuỗi số sau:

$$1 + 2 + \cdots + n + \cdots$$

Chuỗi số này có tổng riêng thứ  $n$  bằng  $n(n+1)/2$  nên tiến ra vô cùng khi  $n$  tiến ra vô cùng. Nói cách khác, chuỗi số này là phân kỳ.

**Ví dụ 1.3 (Ngụy biện toán học).** Chứng minh rằng  $-1 = +\infty$ .

Chứng minh. Xét chuỗi số

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Ta có

$$2S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 1 + S \Rightarrow S = 1.$$

Áp dụng cũng lập luận đó với chuỗi số

$$S = 1 + 2 + 4 + \cdots$$

thì

$$2S = 2 + 4 + 8 + \cdots = S - 1 \Rightarrow S = -1 \Rightarrow -1 = +\infty.$$

Tại sao với cùng một lập luận mà

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

dẫn đến một kết quả đúng, trong khi đó

$$S = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n + \cdots = -1$$

lại dẫn đến một kết quả sai? ■

**Ví dụ 1.4 (Ngụy biện toán học).** Chứng minh rằng  $0 = 1$ .

Chứng minh. Xét chuỗi số  $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ . Ta có

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0.$$

Mặt khác,

$$S = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1.$$

Vậy  $0 = 1$ . ■

**Ví dụ 1.5.** Xét sự hội tụ và tính tổng (nếu có) của <sup>(1)</sup> chuỗi hình học  $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \dots$ . Ta có

$$\begin{cases} S_n &= a + aq + \cdots + aq^{n-1} \\ qS_n &= aq + aq^2 + \cdots + aq^n \end{cases}$$

<sup>(1)</sup>còn gọi là chuỗi cấp số nhân



Do đó  $S_n = a \frac{1-q^n}{1-q}$  ( $q \neq 1$ ) và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \begin{cases} \frac{a}{1-q} & \text{nếu } |q| < 1 \\ \infty & \text{nếu } |q| > 1. \end{cases}$$

• Trường hợp  $q = 1$  dễ thấy chuỗi số đã cho phân kỳ vì có tổng riêng thứ  $n$  bằng  $an$ .

• Trường hợp  $q = -1$  ta có  $S_n = \begin{cases} 0, & \text{nếu } n \text{ chẵn,} \\ a, & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$  nên không tồn tại  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .

**Kết luận:** chuỗi hình học đã cho hội tụ và có tổng bằng  $\frac{a}{1-q}$  nếu  $|q| < 1$  và phân kỳ nếu  $|q| \geq 1$ .

**Ví dụ 1.6.** Viết số thực sau  $2.3\overline{17} = 2.3171717\dots$  dưới dạng phân số.

$$2.3\overline{17} = 2.3 + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \dots$$

Sau số hạng đầu tiên thì chuỗi đã cho là một hình học với  $a = \frac{17}{10^3}$  và  $q = \frac{1}{10^2}$ . Do đó

$$2.3\overline{17} = \frac{\frac{17}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{1147}{495}.$$

**Ví dụ 1.7.** Chứng minh rằng  $1.9999\dots = 2$ .

*Chứng minh.* Ta có

$$1.9999\dots = 1.\overline{9} = 1 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \dots = 1 + \frac{9}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

Sau số hạng đầu tiên thì tổng đã cho là một hình học với  $a = \frac{9}{10}$  và  $q = \frac{1}{10}$ . Do đó,

$$1.9999\dots = 1.\overline{9} = 1 + \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 2. \quad \blacksquare$$

Nếu chỉ nhìn thoáng qua thì có vẻ như  $1.9999\dots < 2$ . Chính vì vậy, nếu chưa được học khái niệm về giới hạn hoặc chuỗi số, đẳng thức này có lẽ sẽ gây bối rối cho nhiều người.

**Ví dụ 1.8 (Nghịch lý Zeno).** <sup>(2)</sup> Có lẽ, một trong những nghịch lý nổi tiếng nhất của toán học là nghịch lý Zeno, được đưa ra bởi nhà triết học Hy Lạp cổ đại Zeno of Elea (c. 490–430 BC). Giả sử bạn thả một quả bóng từ điểm A có độ cao 1 đơn vị độ dài nào đó so với mặt đất. Bạn nghĩ quả bóng sẽ rơi xuống mặt đất (dưới tác dụng của lực hấp dẫn). Tuy nhiên, điều này là không thể. Gọi B là điểm hình chiếu của A xuống mặt đất.

- 1) Để di chuyển từ A đến B, quả bóng phải di chuyển một quãng đường bằng  $\frac{1}{2}$  đến điểm  $A_1$  là trung điểm A và B.
- 2) Sau khi di chuyển đến  $A_1$ , quả bóng sẽ phải di chuyển một quãng đường bằng  $\frac{1}{4}$  đến điểm  $A_2$  là trung điểm giữa  $A_1$  và B.
- 3) sau đó, quả bóng sẽ phải di chuyển một quãng đường bằng  $\frac{1}{8}$  đến điểm  $A_3$  là trung điểm của  $A_2$  và B.
- 4) Quá trình này sẽ tiếp tục, đến bước thứ  $n$  quả bóng sẽ phải di chuyển một quãng đường bằng  $\frac{1}{2^n}$  đến điểm  $A_n$  là trung điểm giữa  $A_{n-1}$  và B.

Vì chuỗi này là vô hạn nên quả bóng sẽ không bao giờ chạm đến mặt đất.

**Một số giải pháp được đề xuất.** Từ xưa đến nay đã có nhiều giải pháp được đề xuất, trong đó có những giải pháp đầu tiên của Aristotle và Archimedes

- 1) Aristotle (384 TCN-322 TCN) nhận xét rằng, vì khoảng cách giảm dần nên thời gian cần thiết để thực hiện di chuyển những khoảng cách đó cũng giảm dần
- 2) Archimedes đã trình bày một phương pháp để tìm ra một kết quả hữu hạn cho một tổng gồm vô hạn phần tử giảm dần, tức là lượng thời gian thực hiện ở mỗi bước giảm theo cấp số nhân, và có vô số khoảng thời gian nhưng tổng thời lượng cần thiết dành cho sự di chuyển từ điểm này đến điểm kia lại là một số hữu hạn, do đó vẫn có thể thực hiện được chuyển động này.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

<sup>(2)</sup>Một nghịch lý tương đương với nó là nghịch lý Achilles và rùa như sau. Achilles chạy đua với rùa. Vì Achilles chạy nhanh hơn rùa nên đồng ý rằng Achilles chấp rùa một đoạn 100 mét. Nếu chúng ta giả sử rằng mỗi tay đua đều bắt đầu chạy với một tốc độ không đổi (Achilles chạy rất nhanh và rùa rất chậm), thì sau một thời gian hữu hạn, Achilles sẽ chạy được 100 mét, tức anh ta đã đến được điểm xuất phát của con rùa. Nhưng trong thời gian này, con rùa cũng đã chạy được một quãng đường ngắn, ví dụ 10 mét. Sau đó Achilles lại tốn một khoảng thời gian nữa để chạy đến điểm cách 10 mét ấy, mà trong thời gian đó thì con rùa lại tiến xa hơn một chút nữa, và cứ như thế mãi. Vì vậy, bất cứ khi nào Achilles đến một vị trí mà con rùa đã đến, thì con rùa lại cách đó một đoạn. Bởi vì số lượng các điểm Achilles phải đến được mà con rùa đã đi qua là vô hạn, do đó anh ta không bao giờ có thể bắt kịp được con rùa

**Ví dụ 1.9.** Chứng minh rằng chuỗi số sau hội tụ và tính  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ . Trước hết ta phân tích  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ . Ta có

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Do đó  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$ .

**Định lý 1.1 (Điều kiện cần để chuỗi hội tụ).**

Nếu chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  là hội tụ, thì  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ .

*Chứng minh.* Đặt  $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ , ta có  $a_n = S_n - S_{n-1}$ . Vì  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  hội tụ nên dãy số  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  là hội tụ. Đặt  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$ . Vì  $n-1 \rightarrow \infty$  khi  $n \rightarrow \infty$  nên  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = S$ . Do đó

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \quad \blacksquare$$

**Chú ý 1.1.**

1. Mệnh đề đảo của Định lý 1.1 là không đúng. Chẳng hạn như chuỗi điều hòa sau đây  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  có  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \rightarrow 0$  khi  $n \rightarrow \infty$ , nhưng chuỗi này là phân kỳ (Xem Ví dụ 2.1 dưới đây).
2. Định lý 1.1 cho chúng ta một điều kiện đủ để kiểm tra một chuỗi là phân kỳ. Cụ thể, nếu  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  không tồn tại hoặc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0$  thì chuỗi đã cho là phân kỳ. Chẳng hạn như chuỗi số sau đây  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$  có  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$  nên chuỗi đã cho là phân kỳ. Tuy nhiên lưu ý rằng nếu  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$  thì chúng ta chưa có kết luận gì về tính hội tụ của chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .
3. Thay đổi một số số hạng đầu tiên của một chuỗi thì không làm ảnh hưởng đến tính hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số đó. Chẳng hạn như hai chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  và  $\sum_{n=2016}^{\infty} a_n$  sẽ có cùng tính chất hội tụ hoặc phân kỳ.

**Ví dụ 1.1.** Chuỗi  $\sum_{n=1}^{+\infty} n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$  là phân kỳ bởi vì khi  $n \rightarrow \infty$

$$u_n = n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \rightarrow 1$$

**Ví dụ 1.2 (Giữa kì, K61).** Xét sự hội tụ của các chuỗi số

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cos \frac{1}{n}.$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cos \frac{2}{n}.$$

**Định lý 1.2 (Các phép toán trên chuỗi số hội tụ).** Nếu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  và  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  là các chuỗi số hội tụ, thì chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$  cũng là một chuỗi số hội tụ và

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

**Bài tập 1.1.** Chứng minh rằng chuỗi số sau hội tụ và tính  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2016}{n(n+1)} + \frac{2017}{2^n} \right)$ .

**Bài tập 1.2.** Xác định xem chuỗi sau đây là hội tụ hay phân kỳ. Nếu nó hội tụ, tính tổng của chúng.

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3}$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( \frac{n^2+1}{2n^2+3} \right)$$

$$(f) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3-n}.$$

[Gợi ý]

$$(a) \text{ Tách } \frac{2}{n^2-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}.$$

$$(b) \text{ Tách } \ln \frac{n}{n+1} = \ln n - \ln(n+1).$$

(c) Chứng minh  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n^3} = \infty$  (bằng cách chuyển qua giới hạn của hàm số  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3} = \infty$ ).  
Chuỗi đã cho phân kì.

(d) Chứng minh  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ln \frac{1}{2}$ . Chuỗi đã cho phân kì.

(e) Chứng minh  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ . Chuỗi đã cho phân kì.

$$(f) \text{ Tách } \frac{1}{n^3-n} = \frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)} \right].$$

**Bài tập 1.3.** Xét sự hội tụ và tính tổng (nếu có) của các chuỗi sau

$$(a) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \dots + \left( \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) + \dots$$

$$(b) \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots$$

$$(c) \frac{1}{9} + \frac{2}{225} + \dots + \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} + \dots$$

[Gợi ý]

(a) Viết chuỗi số đã cho thành tổng của hai chuỗi hình học (hội tụ)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ .

(b) Tách  $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$ .

(c) Tách  $\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{1}{8} \left[ \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2} \right]$ .

Tailieu.vn

## §2. CHUỖI SỐ DƯƠNG

**Định nghĩa 1.1.** Chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  với  $a_n > 0$  được gọi là một chuỗi số dương.

Nhận xét rằng một chuỗi số dương là hội tụ khi và chỉ khi dãy các tổng riêng  $S_n$  của chúng là bị chặn. Trong bài này chúng ta sẽ nghiên cứu các tiêu chuẩn để một chuỗi số dương là hội tụ.

### 2.1 Tiêu chuẩn tích phân

**Định lý 2.1.** Cho  $f(x)$  là một hàm số liên tục, dương, giảm trên đoạn  $[1, \infty)$  và  $a_n = f(n)$ . Khi đó chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  và tích phân suy rộng  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  có cùng tính chất hội tụ hoặc phân kỳ. Nói cách khác,

i) Nếu  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  là hội tụ thì  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  cũng là hội tụ.

ii) Nếu  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  là phân kỳ thì  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  cũng là phân kỳ.

*Chứng minh.* Vì  $f(x)$  là hàm số giảm nên

$$a_{n+1} = f(n+1) \leq f(x) \leq f(n) = a_n, \quad x \in [n, n+1], n = 1, 2, \dots$$

Lấy tích phân từ  $n$  đến  $n+1$  ta được

$$a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq a_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Lấy tổng từ 1 đến  $M-1$  ta được

$$a_2 + a_3 + \dots + a_M \leq \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \dots + \int_{M-1}^M f(x)dx \leq a_1 + a_2 + \dots + a_{M-1}$$

hay

$$a_2 + a_3 + \dots + a_M \leq \int_1^M f(x)dx \leq a_1 + a_2 + \dots + a_{M-1}. \quad (1.1)$$

i) Nếu  $\int_0^{\infty} f(x)dx$  hội tụ, tức tồn tại  $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M f(x)dx = S$  thì từ bất đẳng thức (1.1) ta có  $S_M - a_1 = a_2 + a_3 + \dots + a_M$  là một dãy số tăng và bị chặn trên bởi  $S$  nên tồn tại  $\lim_{M \rightarrow \infty} (S_M - a_1) = A$ . Chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  hội tụ và có tổng bằng  $A + a_1$ .

ii) Nếu  $\int_0^{\infty} f(x)dx$  phân kì, trong trường hợp này vì hàm  $f(x)$  dương nên điều này có nghĩa là  $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M f(x)dx = +\infty$ . Bất đẳng thức (1.1) suy ra  $\lim_{M \rightarrow \infty} S_{M-1} = +\infty$ . Chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  phân kì. ■

**Chú ý 1.1.** Khi sử dụng tiêu chuẩn tích phân, không nhất thiết chuỗi số phải bắt đầu từ  $n = 1$ . Chẳng hạn như chúng ta có thể kiểm tra sự hội tụ của chuỗi số  $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$  bằng cách kiểm tra sự hội tụ của tích phân suy rộng  $\int_4^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2} dx$ .

Tiêu chuẩn tích phân là một tiêu chuẩn rất hữu ích, đặc biệt là khi  $a_n = f(n)$  với  $f(x)$  là một hàm số sơ cấp mà nguyên hàm có thể tính được và cũng là một hàm số sơ cấp. Chẳng hạn như, xét sự hội tụ của chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ . Hàm số  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  là liên tục, dương, và giảm trên đoạn  $[1, \infty)$ . Xét tích phân suy rộng

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_1^{\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

Theo tiêu chuẩn tích phân, chuỗi số đã cho hội tụ.

**Ví dụ 2.1.** Xét sự hội tụ của chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ).

*Chứng minh.* Xét hàm số  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$  là liên tục, dương, và giảm trên  $[1, \infty)$ . Dễ dàng kiểm tra thấy rằng tích phân suy rộng  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  là hội tụ nếu  $\alpha > 1$  và phân kỳ nếu  $0 < \alpha \leq 1$ . Áp dụng tiêu chuẩn tích phân ta có chuỗi đã cho hội tụ nếu  $\alpha > 1$  và phân kỳ nếu  $0 < \alpha \leq 1$ . ■

**Chú ý 1.2.**

a) Hàm zeta được định nghĩa như sau  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$  và được sử dụng nhiều trong lý thuyết số. Nhà toán học Thụy Sĩ Euler là người đầu tiên tính được chính xác  $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ . Ông cũng là người tìm ra công thức  $\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ . Hai công thức này sẽ được chứng minh ở Hệ quả 4.1 (Bài về chuỗi hàm số) và Hệ quả 6.1 (Bài về chuỗi Fourier).

b) Tổng  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  và giá trị của tích phân suy rộng  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  là khác nhau. Chẳng hạn như  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  trong khi đó  $\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$ .

**Bài tập 2.1.** Dùng tiêu chuẩn tích phân chứng minh rằng chuỗi  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$  là hội tụ khi và chỉ khi  $p > 1$ .

**Bài tập 2.2.** Dùng tiêu chuẩn tích phân để xác định xem các chuỗi số sau đây là hội tụ hay phân kỳ.

$$\begin{array}{llll} a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln \frac{1}{n}}{(n+2)^2} & b) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3} & c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3} & d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n)}{(n+3)^2} \\ e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2} & f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n} & g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p} & h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{3n^2} \end{array}$$

**Bài tập 2.3.** Giải thích tại sao không thể dùng tiêu chuẩn tích phân để xác định xem chuỗi sau đây là hội tụ hay phân kỳ.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{\sqrt{n}} \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{1+n^2}$$

## 2.2 Các tiêu chuẩn so sánh

**Định lý 2.2 (Tiêu chuẩn so sánh 1).** Cho hai chuỗi số dương  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  và  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  có  $a_n \leq b_n$  với mọi  $n$  hoặc kể từ một số  $n$  nào đó. Khi đó

i) Nếu  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  là hội tụ thì  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  cũng là hội tụ.

ii) Nếu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  là phân kỳ thì  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  cũng là phân kỳ.

*Chứng minh.* Từ giả thiết suy ra

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_n = B_n. \quad (1.2)$$

i) Nếu  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  hội tụ, nghĩa là tồn tại  $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = B$  và  $B_n \leq B$  với mọi  $n$ . Bất đẳng thức (1.2) chứng tỏ dãy tổng riêng  $A_n$  là một dãy số bị chặn, hơn nữa nó tăng do tính chất của chuỗi số dương, nên tồn tại  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A$ . Chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  hội tụ.

ii) Bạn đọc có thể tự chứng minh một cách đơn giản cũng dựa vào bất đẳng thức (1.2). ■

**Ví dụ 2.1.** Xét sự hội tụ của chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$ .



**Chứng minh.** Ta có  $\frac{1}{n^2+n+1} < \frac{1}{n^2}$ . Mà  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  là hội tụ theo Ví dụ 2.1, nên chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$  cũng là hội tụ. ■

**Ví dụ 2.2.** Xét sự hội tụ của chuỗi  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ .

**Chứng minh.** Ta có  $\ln n < n$  với mọi  $n \geq 2$ . Do đó  $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n}$ . Mà chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  là phân kỳ theo Ví dụ 2.1, nên chuỗi  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$  là phân kỳ. ■

**Ví dụ 2.3 (Cuối kì, K62).** Xét sự hội tụ của chuỗi  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{[\ln(\ln(n+1))]^{\ln n}}$ .

[Lời giải] Ta có

$$u_n = \frac{1}{[\ln(\ln(n+1))]^{\ln n}} = \frac{1}{e^{\ln[\ln(\ln(n+1))]^{\ln n}}} = \frac{1}{e^{\ln n \ln[\ln(\ln(n+1))]} = \frac{1}{n^{\ln[\ln(\ln(n+1))]}.$$

Vì  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln[\ln(\ln(n+1))] = +\infty$  nên tồn tại  $N_0 > 0$  sao cho  $\ln[\ln(\ln(n+1))] > 2 \forall n > N_0$

$$\Rightarrow u_n < \frac{1}{n^2} \forall n > N_0 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} u_n \text{ hội tụ.}$$

**Ví dụ 2.4 (Giữa kì, K61).** Xét sự hội tụ của các chuỗi số

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(2n+1)}$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n^3+1}}$

b)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(2n-1)}$

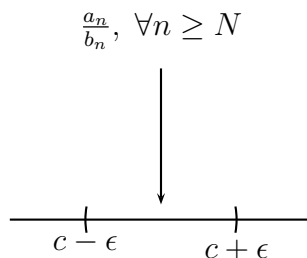
d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n^3+1}}$

**Định lý 2.3 (Định lý so sánh 2).** Cho hai chuỗi số dương  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  và  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  thỏa mãn

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0.$$

Khi đó  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  và  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  có cùng tính chất hội tụ hoặc phân kỳ.

**Chứng minh.** Hình dung rằng  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$  nghĩa là với mọi  $\epsilon > 0$  thì từ một lúc nào đó toàn bộ số hạng của dãy  $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}_{n \geq N}$  sẽ chui vào trong khoảng  $(c - \epsilon, c + \epsilon)$ .



Hình 2.3

Theo giả thiết, với mọi  $\epsilon > 0$ , tồn tại số  $N$  sao cho

$$c - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < c + \epsilon \Leftrightarrow (c - \epsilon)b_n < a_n < (c + \epsilon)b_n.$$

Lấy tổng từ  $n = N$  đến  $\infty$  ta được

$$(c - \epsilon) \sum_{n=N}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=N}^{\infty} a_n \leq (c + \epsilon) \sum_{n=N}^{\infty} b_n. \quad (1.3)$$

Không mất tính tổng quát số  $\epsilon$  có thể chọn sao cho  $c - \epsilon > 0$ . Khi đó

- về phải của bất đẳng thức (1.3) chứng tỏ rằng nếu  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  hội tụ thì  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  hội tụ,
- về trái của bất đẳng thức (1.3) chứng tỏ rằng nếu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  hội tụ thì  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  hội tụ. ■

### Chú ý 1.1.

#### a) Các trường hợp đặc biệt

- Nếu  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$  và chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  hội tụ thì  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  cũng hội tụ. Điều này dễ hiểu vì  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$  suy ra với  $n$  đủ lớn thì  $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$  hay  $a_n \leq b_n$  với mọi  $n \geq N$  nào đó.
- Nếu  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$  và chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  phân kì thì  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  cũng phân kì. Điều này cũng dễ hiểu vì  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$  suy ra với  $n$  đủ lớn thì  $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$  hay  $a_n \geq b_n$  với mọi  $n \geq N$  nào đó

b) Cũng giống như TPSR, khi xét sự hội tụ của chuỗi số người ta chỉ quan tâm đến "dạng điệu" của số hạng tổng quát  $a_n$  tại vô cùng. Tiêu chuẩn so sánh thường được sử dụng để so sánh chuỗi số đã cho với một trong hai chuỗi số sau đây:

- Chuỗi hình học  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$   $\begin{cases} \text{hội tụ nếu } |q| < 1, \\ \text{phân kì nếu } |q| \geq 1. \end{cases}$
- Chuỗi hàm zeta  $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$   $\begin{cases} \text{hội tụ nếu } \alpha > 1, \\ \text{phân kì nếu } \alpha \leq 1. \end{cases}$

**Ví dụ 2.1.** Xét sự hội tụ của chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{\sqrt{n^5+1}}$ .

*Chứng minh.* Số hạng trội (chiếm ưu thế) của tử số là  $n^2$  và số hạng trội của mẫu số là  $\sqrt{n^5} = n^{5/2}$ . Điều đó gợi ý chúng ta so sánh chuỗi số đã cho với chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^5}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ .

Ta có

$$a_n = \frac{n^2 + n}{\sqrt{n^5 + 1}}, \quad b_n = \frac{1}{n^{1/2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n^2 + n) \cdot n^{1/2}}{\sqrt{n^5 + 1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^5}}} = 1.$$

Mà chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$  là phân kỳ theo Ví dụ 2.1 nên chuỗi đã cho cũng phân kỳ. ■

**Ví dụ 2.2.** Xét sự hội tụ của chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n + 5^n}$ .

*Chứng minh.* Số hạng trội (chiếm ưu thế) của tử số là  $3^n$  và số hạng trội của mẫu số là  $5^n$ . Điều này gợi ý chúng ta so sánh chuỗi số đã cho với chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ . Ta có

$$a_n = \frac{2^n + 3^n}{4^n + 5^n}, \quad b_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2^n + 3^n)5^n}{(4^n + 5^n)3^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{\left(\frac{4}{5}\right)^n + 1} = 1.$$

Mà chuỗi hình học  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$  là hội tụ theo Ví dụ 1.5, do đó chuỗi số đã cho cũng là hội tụ. ■

**Chú ý 1.2.** Tiêu chuẩn so sánh thường được sử dụng để xét sự hội tụ của các chuỗi số có dạng sau:

1. Chuỗi có số hạng tổng quát là một phân thức, trong đó tử số và mẫu số đều là các đa thức của  $n$  hoặc là các lũy thừa của  $n$ , chẳng hạn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_0 + a_1 n^{\alpha_1} + a_2 n^{\alpha_2} + \dots + a_m n^{\alpha_m}}{b_0 + b_1 n^{\beta_1} + b_2 n^{\beta_2} + \dots + b_k n^{\beta_k}}, \quad \text{với } 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m, 0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_k.$$

Khi đó số hạng trội của tử số là  $a_m n^{\alpha_m}$  và số hạng trội của mẫu là  $b_k n^{\beta_k}$ . Điều này gợi ý chúng ta so sánh chuỗi đã cho với chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha_m}}{n^{\beta_k}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta_k - \alpha_m}}$ . Theo Ví dụ 2.1, chuỗi đã cho là hội tụ nếu  $\beta_k - \alpha_m > 1$  và phân kỳ nếu  $\beta_k - \alpha_m \leq 1$ .

2. Chuỗi có số hạng tổng quát là một phân thức, trong đó tử số và mẫu số đều là tổng của các lũy thừa với số mũ là  $n$ , chẳng hạn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_1 a_1^n + \alpha_2 a_2^n + \dots + \alpha_m a_m^n}{\beta_1 b_1^n + \beta_2 b_2^n + \dots + \beta_k b_k^n}, \quad \text{với } 0 < a_1 < a_2 < \dots < a_m, 0 < b_1 < b_2 < \dots < b_k.$$

Khi đó số hạng trội của tử số là  $\alpha_m a_m^n$  và số hạng trội của mẫu số là  $\beta_k b_k^n$ . Điều này gợi ý chúng ta so sánh chuỗi số đã cho với chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_m}{b_k}\right)^n$ . Theo Ví dụ 1.5, chuỗi đã cho hội tụ nếu  $\frac{a_m}{b_k} < 1$  và phân kỳ nếu  $\frac{a_m}{b_k} \geq 1$ .

3. Một dạng chuỗi khác cũng sử dụng tiêu chuẩn so sánh, đó là các chuỗi số có sử dụng đến các VCB tương đương hoặc khai triển Maclaurin (trong học phần Giải tích I). Chẳng hạn như, xét sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}\right).$$

Xuất phát từ công thức khai triển Maclaurin của hàm số  $\sin x$ :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$

ở đó  $o(x^3)$  là kí hiệu VCB bậc cao hơn  $x^3$ , ta có

$$x - \sin x = \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{6} \text{ khi } x \rightarrow 0.$$

Khi  $n \rightarrow \infty$  thì  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ , do đó

$$\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{6n^3} \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Mà chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$  hội tụ, nên theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi số đã cho cũng hội tụ. Một cách tương tự, xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{e} - 1 - \frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{n-1}{n^2 - n + 1}.$$

**Một số khai triển Maclaurin**

- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$

Một số VCB tương đương hay dùng khi  $x \rightarrow 0$