Chương 3

ĐƯỜNG BẬC HAI

Trong chương trước, chúng ta đã thấy mỗi phương trình bậc nhất hai biến x và y là phương trình của một đường thẳng trong mặt phẳng Oxy. Trong chương này, chúng ta sẽ nghiên cứu các đường bậc hai trong mặt phẳng, tức là các đường xác định bởi các phương trình bậc hai đối với hai biến x và y trong mặt phẳng Oxy. Bên cạnh đó, chúng ta cũng sẽ nghiên cứu một số chủ đề liên quan đến chúng như tâm, phương tiệm cận, đường tiệm cận,..... Đặc biệt, những dấu hiệu bất biến để nhận biết các đường bậc hai với phương trình tổng quát cũng được trình bày chi tiết. Trong phần 3.1 các vấn đề được xét trong mặt phẳng với hệ toạ độ trực chuẩn.

3.1 Ba đường conic

3.1.1 Đường tròn và ellipse

Đường tròn

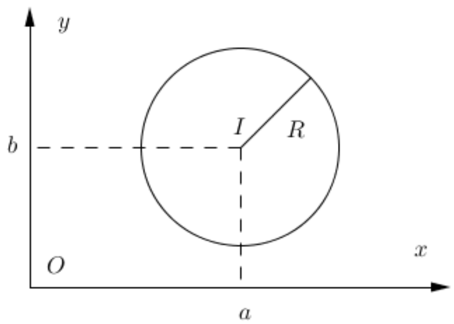
Ta đã biết phương trình của *đường tròn* tâm $I(a, b)$, bán kính R là

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \tag{3.1}$$

Phương trình (3.1) có thể viết

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + m = 0,$$

trong đó $m = a^2 + b^2 - R^2$, xem Hình 3.1.



Hình 3.1: Đường tròn.

Như vậy, phương trình đường tròn là một phương trình bậc hai với hai biến x, y thỏa mãn hai điều kiện sau đây

- Các hệ số của x^2 và y^2 bằng nhau;
- Không có số hạng chứa tích xy.

Bây giờ ta sẽ xét xem khi nào thì một phương trình bậc hai với hai biến x, y thỏa mãn hai điều kiện nói trên là phương trình của một đường tròn. Cho phương trình

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0, \tag{3.2}$$

trong đó $A \neq 0$. Chia cả hai vế của (3.2) cho A, ta được phương trình tương đương với (3.2) là

$$x^2 + y^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}y + \frac{D}{A} = 0. \tag{3.3}$$

Phương trình (3.3) có thể viết là

$$\left(x^2 + 2\frac{B}{2A}x + \frac{B^2}{4A^2}\right) + \left(y^2 + 2\frac{C}{A}y + \frac{C^2}{4A^2}\right) + \frac{D}{A} - \frac{B^2}{4A^2} - \frac{C^2}{4A^2} = 0$$

hay

$$\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{2A}\right)^2 = \frac{B^2 + C^2 - 4AD}{4A^2}. \tag{3.4}$$

Đặt

$$\frac{B}{2A} = -a, \frac{C}{2A} = -b.$$

Có thể xảy ra ba trường hợp sau đây

(1) $\dfrac{B^2 + C^2 - 4AD}{4A^2} = R^2 > 0$. Phương trình (3.4) có dạng

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

nghĩa là phương trình (3.2) là phương trình đường tròn tâm (a, b), bán kính R.

(2) $\dfrac{B^2 + C^2 - 4AD}{4A^2} = 0$. Phương trình (3.4) trở thành

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0.$$

Đây là phương trình của đường tròn tâm (a, b), bán kính 0 mà người ta gọi là *đường tròn điểm.*

(3) $\dfrac{B^2 + C^2 - 4AD}{4A^2} = -R^2 < 0$. Phương trình (3.4) trở thành

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = -R^2.$$

Phương trình này không xác định điểm thực[1] nào. Người ta nói phương trình này xác định một *đường tròn ảo.*

Ví dụ 3.1.1. Tìm tọa độ của tâm và bán kính của đường tròn

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y + 16 = 0.$$

Giải.
Phương trình đã cho có thể viết dưới dạng:

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 3^2.$$

Đây là phương trình của đường tròn có tâm $I(4, -3)$ và bán kính $R = 3$.

[1] Điểm thực là điểm có tọa độ là các số thực.

Ellipse

Định nghĩa 3.1.2. *Ellipse* là quỹ tích những điểm trên mặt phẳng sao cho tổng các khoảng cách từ điểm đó đến hai điểm cố định cho trước bằng một số không đổi lớn hơn khoảng cách giữa hai điểm ấy.

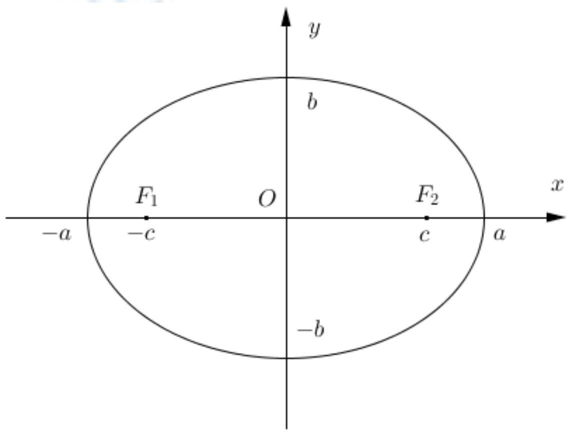
Hai điểm cố định ấy được gọi là *tiêu điểm*. Khoảng cách giữa hai tiêu điểm gọi là *tiêu cự*.

Giả sử F_1 và F_2 là hai tiêu điểm của ellipse với $F_1F_2 = 2c$ là tiêu cự. Điểm M nằm trên ellipse khi và chỉ khi

$$F_1M + F_2M = 2a,$$

trong đó $a > c$.

Từ định nghĩa ta thấy ellipse nhận đường thẳng F_1F_2 và đường trung trực của đoạn F_1F_2 làm các trục đối xứng. Để cho phương trình của ellipse được đơn giản, ta chọn các trục đối xứng của ellipse làm các trục tọa độ: trục hoành là trục đi qua F_1, F_2, gốc tọa độ O là trung điểm của đoạn F_1F_2. Như vậy, tiêu điểm F_1 có tọa độ $(-c, 0)$, tiêu điểm F_2 có tọa độ $(c, 0)$ xem Hình 3.2.



Hình 3.2: Ellipse.

Giả sử điểm $M(x, y)$ là một điểm trên ellipse. Ta có

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},\ F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Từ định nghĩa của ellipse, ta có

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \tag{3.5}$$

Đó là phương trình của ellipse trong hệ tọa độ vừa chọn. Muốn đưa phương trình ấy về một dạng đơn giản hơn, trước hết ta đưa căn thức thứ nhất sang vế phải rồi bình phương hai vế ta được

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = cx + a^2.$$

Bình phương hai vế một lần nữa, ta có

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Vì $a > c$ nên $a^2 - c^2 > 0$. Đặt $a^2 - c^2 = b^2$, ta được

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Chia hai vế với a^2b^2, ta được

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3.6}$$

Ta lưu ý rằng phương trình (3.6) không chắc tương đương với phương trình (3.5) vì trong quá trình biến đổi phương trình (3.5) ta đã bình phương hai vế của nó hai lần. Vì vậy, muốn chứng tỏ phương trình (3.6) là phương trình của ellipse, ta cần chứng minh rằng mọi điểm có tọa độ thỏa mãn phương trình (3.6) đều nằm trên ellipse (xem như bài tập).

Phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

là *phương trình của ellipse* và gọi là *phương trình chính tắc* của ellipse. Phương trình này là một phương trình bậc hai nên ellipse là một đường bậc hai.

Ellipse nhận các trục tọa độ làm các trục đối xứng và gốc tọa độ làm tâm đối xứng. Trục Ox được gọi là *trục lớn*, và Oy được gọi là *trục bé* của ellipse, a được gọi là *bán trục lớn*, b được gọi là *bán trục bé* .

3.1.2 Hyperbol và parabol

Hyperbol

Định nghĩa 3.1.3. *Hyperbol* là quỹ tích các điểm trên mặt phẳng sao cho giá trị tuyệt đối của hiệu các khoảng cách từ điểm đó đến hai điểm cố định cho trước bằng một số không đổi nhỏ hơn khoảng cách giữa hai điểm ấy.

Hai điểm cố định ấy gọi là hai *tiêu điểm*, kí hiệu là F_1, F_2. Khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ gọi là *tiêu cự*.

Điểm M nằm trên hyperbol khi và chỉ khi

$$|F_1M - F_2M| = 2a,\ a < c.$$

Nếu chọn hệ tọa độ trực chuẩn Oxy sao cho $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ thì phương trình chính tắc của hyperbol có dạng

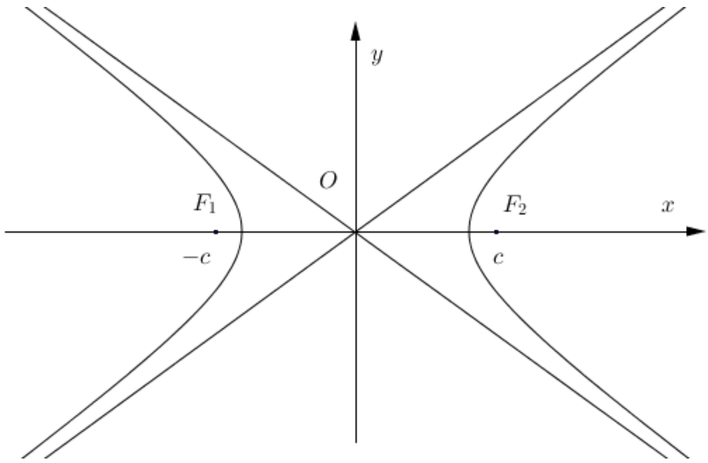
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

trong đó $b^2 = c^2 - a^2$.

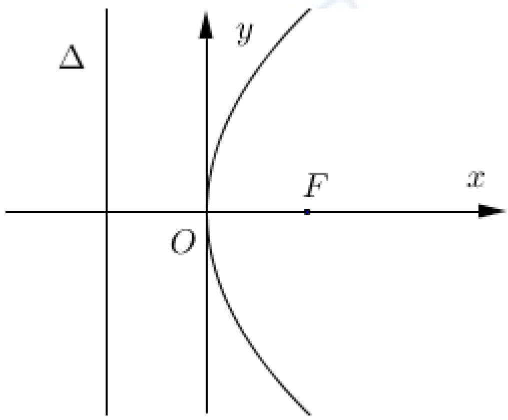
Hyperbol nhận các trục tọa độ làm trục đối xứng, gốc tọa độ làm tâm đối xứng. Trục Ox cắt hyperbol tại các điểm $(-a, 0), (a, 0)$ nên Ox gọi là *trục thực*, Oy không cắt hyperbol nên gọi là *trục ảo*, xem Hình 3.3.

Hyperbol có hai *đường tiệm cận* là

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$



Hình 3.3: Hyperbol.



Hình 3.4: Parabol.

Parabol

Định nghĩa 3.1.4. *Parabol* là quỹ tích những điểm trên mặt phẳng sao cho khoảng cách từ đó đến một điểm cố định cho trước (gọi là *tiêu điểm*) bằng khoảng cách từ điểm đó đến một đường thẳng cho trước (gọi là *đường chuẩn*) không đi qua điểm đã cho.

Nếu tiêu điểm là F, đường chuẩn là $\Delta \not\ni F$, thì M thuộc parabol khi và chỉ khi $FM = d(M, \Delta)$, tức là $FM = MH$, với H là hình chiếu của M lên Δ.

Chọn hệ tọa độ trực chuẩn Oxy sao cho $F(p/2, 0)$, phương trình đường chuẩn Δ là $x = -\dfrac{p}{2}$ thì phương trình chính tắc của parabol là $y^2 = 2px$, p là khoảng cách từ F đến Δ gọi là tham số của parabol, xem Hình 3.4.

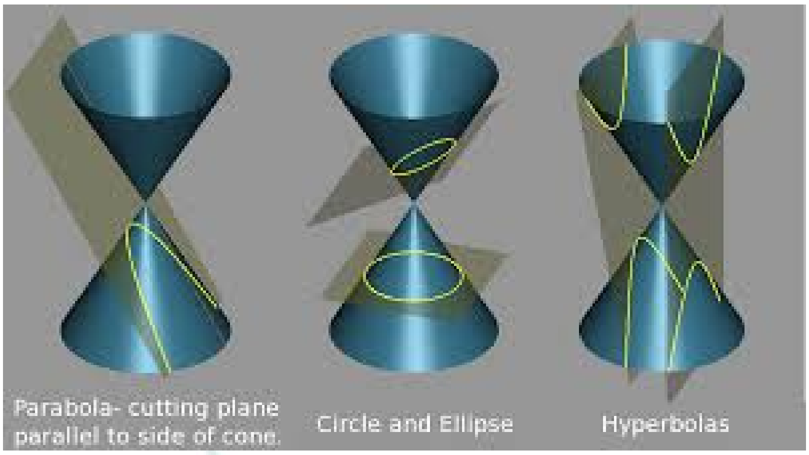
3.1.3 Ba đường conic

Các đường ellipse, hyperbol, parabol còn có tên gọi chung là các *đường conic*.

Nguồn gốc của chữ "conic" là khi cắt một mặt nón tròn xoay [2], xem Hình 3.5, bởi một mặt phẳng không đi qua đỉnh của mặt nón thì giao tuyến sẽ là

[2]"nón" dịch từ chữ "cone".

- Đường ellipse nếu mặt cắt không song song với một đường sinh nào của mặt nón (đặc biệt, ellipse là đường tròn nếu mặt cắt vuông góc với trục của mặt nón).
- Đường parabol nếu mặt cắt song song với một đường sinh của mặt nón.
- Đường hyperbol nếu mặt cắt song song với hai đường sinh của mặt nón.



Hình 3.5: Minh họa cho ba đường conic.

Nhà toán học Hy Lạp Apollonius, làm việc tai Alecxandri, đã chứng minh được điều đó (khoảng năm 200 TCN) theo cách lập phương trình như trong môn Hình học giải tích.

Ta đã thấy phương trình chính tắc của ellipse, hyperbol và parabol là những phương trình bậc hai đối với x, y và là những trường hợp riêng của phương trình

$$Ax^2 + By^2 + 2Cx + D = 0, \tag{3.7}$$

trong đó A và B không đồng thời bằng 0.

(1) Nếu $A = \dfrac{1}{a^2}, B = \dfrac{1}{b^2}, C = 0, D = -1$ thì phương trình (3.7) trở thành $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Phương trình đó là phương trình của ellipse (đường tròn là một ellipse đặc biệt).

(2) Nếu $A = \dfrac{1}{a^2}, B = -\dfrac{1}{b^2}, C = 0, D = -1$ thì phương trình (3.7) trở thành $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Phương trình đó là phương trình của hyperbol.

(3) Nếu $A = 0, B = 1, C = -p, D = 0$ thì phương trình (3.7) trở thành $y^2 = 2px$. Đó là phương trình của parabol.

Dựa vào phương trình (3.7) ta có thể nghiên cứu ba đường conic một cách thuận lợi.

3.1.4 Đường kính của ba đường conic

Trước hết hãy nghiên cứu bài toán sau đây:

Bài toán. Cho một đường conic và một họ những đường thẳng song song với nhau. Tìm quỹ tích những trung điểm của những cặp giao điểm của đường conic và họ những đường thẳng đã cho.

Giải. Ta chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho phương trình của đường conic là phương trình chính tắc, nghĩa là nó có dạng (3.7). Kí hiệu vế trái của phương trình (3.7) là $f(x, y)$, nghĩa là

$$f(x, y) = Ax^2 + By^2 + 2Cx + D.$$

Giả sử trong hệ tọa độ đã chọn, họ đường thẳng đã cho nhận vectơ $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$ làm vectơ chỉ phương. Gọi $M(x_0, y_0)$ là trung điểm của một dây tùy ý M_1M_2. Đường thẳng M_1M_2 có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t. \end{cases} \tag{3.8}$$

Thay giá trị x, y trong (3.8) vào (3.7), ta được phương trình bậc hai đối với t có dạng:

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0, \tag{3.9}$$

trong đó

$$\begin{aligned} P &= Aa_1^2 + Ba_2^2, \\ Q &= Aa_1x_0 + Ba_2y_0 + Ca_1, \\ R &= x_0^2 + By_0^2 + 2Cx_0 + D. \end{aligned}$$

Nếu gọi $f'_x(x_0, y_0)$ là đạo hàm riêng của $f(x, y)$ đối với x lấy tại điểm (x_0, y_0)[3], $f'_y(x_0, y_0)$ là đạo hàm riêng của $f(x, y)$ đối với y lấy tại điểm (x_0, y_0), thì ta có

$$2Q = f'_x(x_0, y_0)a_1 + f'_y(x_0, y_0)a_2.$$

Vì hai đường (3.7) và (3.8) cắt nhau nên phương trình (3.9) có hai nghiệm t_1, t_2. Ứng với hai giá trị t_1, t_2 ấy, ta có hai giao điểm M_1 và M_2, nghĩa là

$$M_1(x_0 + a_1t_1, y_0 + a_2t_1), \ M_2(x_0 + a_1t_2, y_0 + a_2t_2).$$

Nhưng đoạn thẳng M_1M_2 nhận $M(x_0, y_0)$ làm trung điểm nên $t_1 = -t_2$, hay $t_1 + t_2 = 0$. Theo định lí Viet, ta có $Q = 0$ hay

$$f'_x(x_0, y_0)a_1 + f'_y(x_0, y_0)a_2 = 0,$$

suy ra

$$Aa_1x_0 + Ba_2y_0 + Ca_1 = 0. \tag{3.10}$$

Dễ thấy các hệ số của x_0 và y_0 trong phương trình (3.10) không đồng thời bằng không. Do đó, đây là phương trình tổng quát của một đường thẳng. Vậy, các trung điểm của các đoạn thẳng M_1M_2 nhận vectơ $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$ làm vectơ chỉ phương

[3] $f'_x(x_0, y_0)$ chính là đạo hàm của hàm số một biến số $f(x, y_0)$ tại điểm x_0, còn $f'_y(x_0, y_0)$ chính là đạo hàm của hàm số một biến số $f(x_0, y)$ tại điểm y_0.

nằm trên đường thẳng Δ có phương (3.10). Đường thẳng Δ được gọi là *đường kính của đường conic liên hợp với phương* $\overrightarrow{a}$.

Tóm lại, phương trình của đường kính của đường conic $f(x, y) = 0$, liên hợp với phương $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$ là

$$f'_x(x_0, y_0)a_1 + f'_y(x_0, y_0)a_2 = 0. \tag{3.11}$$

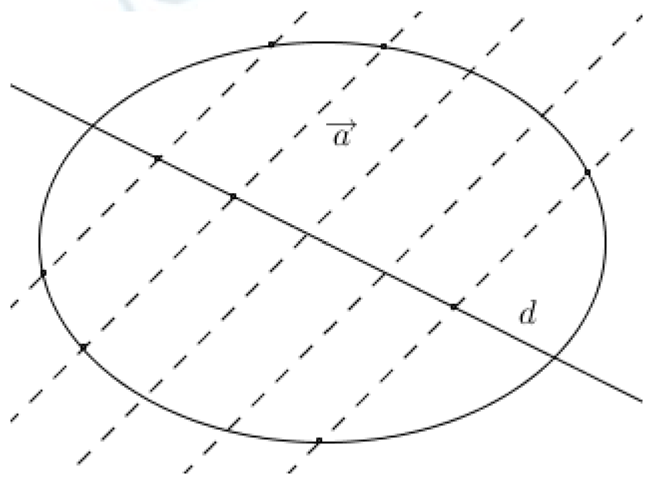
Từ phương trình (3.11) có thể tìm được phương trình của đường kính của ellipse (đường tròn), hyperbol, parabol xác định bởi các phương trình chính tắc của chúng.

Đường kính của ellipse

Đường kính liên hợp với phương $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$ của ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ xác định bởi phương trình

$$\frac{x}{a^2}a_1 + \frac{y}{b^2}a_2 = 0. \tag{3.12}$$

Từ (3.12) ta thấy *đường kính của ellipse* đi qua gốc tọa độ, tức là qua tâm đối xứng của ellipse, xem Hình 3.6.



Hình 3.6: Đường kính của ellipse.

Nếu giá của $\overrightarrow{a}$ không song song với trục Oy, tức là $a_1 \neq 0$, thì $k = \dfrac{a_2}{a_1}$ là hệ số góc của đường thẳng có phương $\overrightarrow{a}$. Lúc đó, phương trình của đường kính liên hợp với phương k là

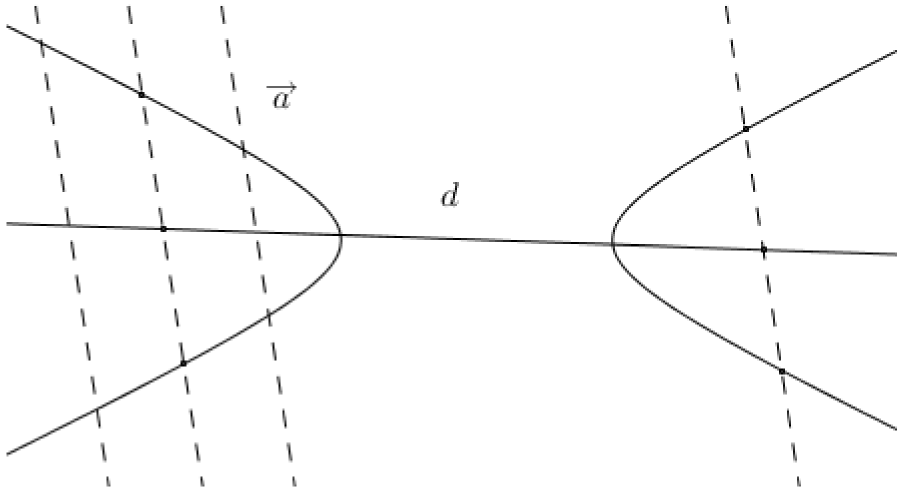
$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2}k = 0$$

hay

$$y = -\frac{b^2}{a^2 k}x.$$

Gọi hệ số góc của đường kính này là k' thì $k' = -\dfrac{b^2}{a^2 k}$. Từ đó

$$kk' = -\frac{b^2}{a^2}. \tag{3.13}$$



Hình 3.7: Đường kính của hyperbol.

Trong đẳng thức trên, ta thấy vai trò của k và k' bình đẳng, do đó đường kính liên hợp với phương k' sẽ có hệ số góc k. Hai đường kính có hệ số góc k và k' liên hệ với nhau bởi công thức (3.13) gọi là *hai đường kính liên hợp*. Mỗi đường kính trong hai đường kính liên hợp chia đôi các dây song song với đường kính kia.

Từ (3.13) ta suy ra k và k' khác dấu, nghĩa là nếu một đường kính nằm trong các góc tọa độ I và III thì đường kính liên hợp với nó nằm trong các góc tọa độ II và IV. Giả sử $k > 0$ thì $k' < 0$. Nếu k tăng thì đường kính có hệ số góc k quay ngược chiều kim đồng hồ. Lúc đó, k' giảm về giá trị tuyệt đối; nhưng vì $k' < 0$ nên giá trị tuyệt đối của nó tăng, nghĩa là đường kính liên hợp có hệ số góc k' cũng quay ngược hướng quay của kim đồng hồ. Nếu $k \to 0$ thì $|k'| \to \infty$. Lúc đó, hai đường kính liên hợp dần tới hai trục đối xứng của ellipse nên vuông góc với nhau. Cuối cùng, từ (3.13) ta thấy k luôn luôn khác k', vì $kk' < 0$. Như vậy, hai đường kính liên hợp của ellipse không bao giờ trùng nhau. Chú ý rằng hai đường kính liên hợp của đường tròn luôn luôn vuông góc với nhau.

Đường kính của hyperbol

Đường kính liên hợp với phương $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$ của hyperbol $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ xác định bởi phương trình

$$\frac{x}{a^2}a_1 - \frac{y}{b^2}a_2 = 0. \tag{3.14}$$

Từ (3.14) ta thấy *đường kính của hyperbol* đi qua gốc tọa độ, tức là tâm đối xứng của hyperbol, xem Hình 3.7.

Nếu giá của $\overrightarrow{a}$ không song song với trục Oy, tức là $a_1 \neq 0$, thì $k = \dfrac{a_2}{a_1}$ là hệ số góc của đường thẳng có phương $\overrightarrow{a}$. Lúc đó, phương trình của đường kính của hyperbol liên hợp với phương k là

$$\frac{x}{a^2} - \frac{y}{b^2}k = 0$$

hay

$$y = -\frac{b^2}{a^2 k}x.$$

Gọi hệ số góc của đường kính này là k' thì $k' = \dfrac{b^2}{a^2k}$. Từ đó

$$kk' = \frac{b^2}{a^2}. \tag{3.15}$$

Hai đường kính của hyperbol có hệ số góc k và k' liên hệ với nhau bởi công thức (3.15) gọi là *hai đường kính liên hợp*. Mỗi đường kính trong hai đường kính liên hợp chia đôi các dây song song với đường kính kia.

Từ (3.15) ta suy ra k và k' cùng dấu, nghĩa là hai đường kính cùng nằm trong những góc tọa độ như nhau. Nếu k tăng thì k' giảm, nghĩa là nếu một đường kính quay ngược hướng quay của kim đồng hồ thì đường kính liên hợp của nó quay theo hướng quay của kim đồng hồ. Nếu $k \to 0$ thì $k' \to \infty$. Lúc đó, hai đường kính liên hợp dần tới hai trục đối xứng của hyperbol nên vuông góc với nhau. Từ (3.15) ta thấy nếu $k \to \pm\dfrac{b}{a}$ thì $k' \to \pm\dfrac{b}{a}$, nghĩa là nếu một đường kính của hyperbol dần tới một đường tiệm cận của hyperbol thì đường kính liên hợp cũng quay dần tới đường tiệm cận ấy.

Ví dụ 3.1.5. Cho ellipse $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. Tìm phương trình của hai đường kính liên hợp trong đó có một đường đi qua điểm $(4, 2)$.

Giải.

Vì các đường kính của ellipse đi qua tâm, tức là gốc tọa độ, nên chúng có dạng $y = kx$. Theo giả thiết, ta có

$$2 = 4k \Rightarrow k = \frac{1}{2}.$$

Hệ số góc của đường kính liên hợp được xác định bởi điều kiện $kk' = -\dfrac{b^2}{a^2}$. Suy ra $k' = -1$.

Vậy, phương trình của hai đường kính liên hợp cần tìm là $y = \dfrac{x}{2}$ và $y = -x$.

Đường kính của parabol

Đường kính liên hợp với phương $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$ của parabol $y^2 = 2px$ xác định bởi phương trình

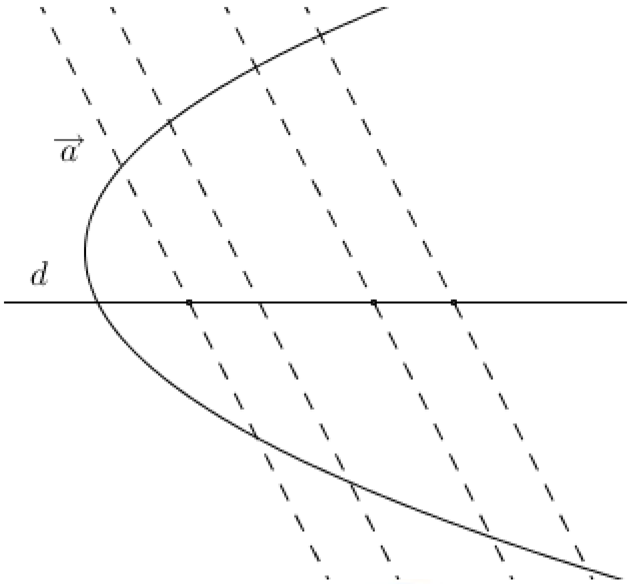
$$ya_2 - pa_1 = 0. \tag{3.16}$$

Nếu giá của $\overrightarrow{a}$ không song song với trục Oy, tức là $a_1 \neq 0$ thì $k = \dfrac{a_2}{a_1}$ là hệ số góc của đường thẳng có phương $\overrightarrow{a}$. Lúc đó, phương trình của *đường kính của parabol* liên hợp với phương k là

$$yk - p = 0 \text{ hay } y = \frac{p}{k}. \tag{3.17}$$

Từ (3.17) ta thấy mọi đường kính của parabol đều song song hay trùng với trục Ox. Nếu $k \to \infty$ thì đường kính liên hợp với phương k ấy dần tới trục Ox. Đó là đường kính vuông góc với dây liên hợp.

Chú ý. Đối với parabol không có khái niệm "hai đường kính liên hợp" như đối với ellipse, hyperbol. Đường kính liên hợp với phương $\overrightarrow{a}$ tùy ý luôn song song hoặc trùng với trục của parabol.



Hình 3.8: Đường kính của parabol.

Ví dụ 3.1.6. Cho parabol $\mathcal{P}: y^2 = -8x$. Qua điểm $A(-1, 1)$, hãy dựng một dây cắt $\mathcal{P}$ tại hai điểm nhận điểm A làm trung điểm.

Giải.

Phương trình đường thẳng chứa dây phải tìm có dạng $y - 1 = k(x + 1)$. Đường kính liên hợp theo phương k phải qua điểm A. Phương trình của đường kính có dạng $y = -\frac{p}{k} = -\frac{4}{k}$. Do đó, ta có

$$1 = -\frac{4}{k} \Rightarrow k = -4.$$

Vậy, phương trình của đường thẳng chứa dây cần tìm là $y - 1 = -4(x + 1)$ hay $4x + y + 3 = 0$.

3.1.5 Tiếp tuyến của ba đường conic

Định nghĩa 3.1.7. *Tiếp tuyến* của đường conic là đường thẳng cắt đường conic tại hai điểm trùng nhau.

Trong mặt phẳng Oxy, cho đường conic xác định bởi phương trình

$$f(x, y) = Ax^2 + By^2 + 2Cx + D = 0$$

và một điểm $M_0(x_0, y_0)$ nằm trên đường ấy. Khi đó, theo định nghĩa, tiếp tuyến của của đường conic đã cho tại điểm M_0 có phương trình là

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Suy ra

(1) Phương trình tiếp tuyến của ellipse $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tại điểm $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$ là

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

(2) Phương trình tiếp tuyến của hyperbol $\mathcal{H} : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ tại điểm $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{H}$ là

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1.$$

(3) Phương trình tiếp tuyến của parabol $\mathcal{P} : y^2 = 2px$ tại điểm $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$ là

$$y_0y = p(x + x_0).$$

Ví dụ 3.1.8. Cho ellipse $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ và đường thẳng $3x + 2y - 12 = 0$. Tìm giao điểm của hai tiếp tuyến xuất phát từ hai giao điểm của ellipse và đường thẳng đã cho.

Giải.

Giao điểm của ellipse và đường thẳng đã cho có tọa độ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ 3x + 2y - 12 = 0. \end{cases}$$

Ta được hai nghiệm $(4, 0)$ và $\left(\dfrac{12}{5}, \dfrac{12}{5}\right)$.

Theo trên, ta có hai tiếp tuyến của ellipse tại $(4, 0)$ và $\left(\dfrac{12}{5}, \dfrac{12}{5}\right)$ lần lượt có phương trình là $x = 4$ và $9x + 16y - 60 = 0$.

Giao điểm cần tìm có tọa độ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x = 4 \\ 9x + 16y - 60 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Vây, điểm cần tìm là $\left(4, \dfrac{3}{2}\right)$.

Định nghĩa 3.1.9. Giả sử M là một điểm nằm trên đường conic. Khi đó, đoạn thẳng từ M đến tiêu điểm của đường conic được gọi là *bán kính qua tiêu* của M.

Ta có định lí sau nói lên tính chất quang học của ba đường conic.

Định lí 3.1.10 (Pascal). *(i) Tiếp tuyến của ellipse (hyperbol) tạo với hai bán kính qua tiêu của tiếp điểm những góc bằng nhau.*

(ii) Tiếp tuyến của parabol tạo với bán kính qua tiêu của tiếp điểm và trục của parabol những góc bằng nhau.

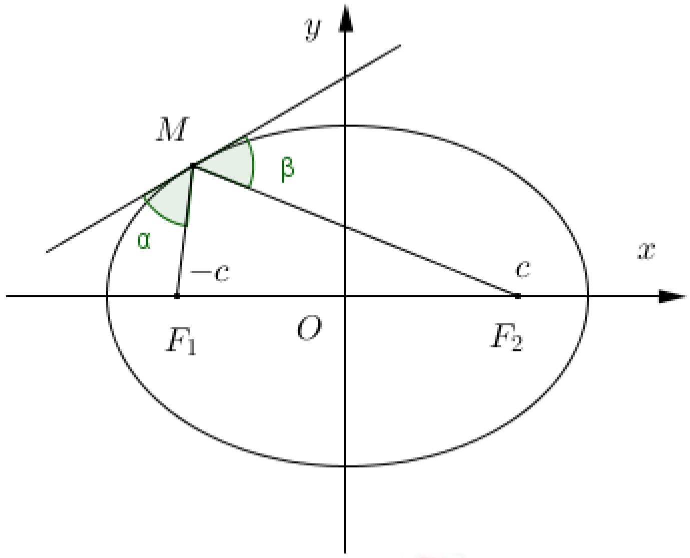
Chứng minh. (i) Ta sẽ chứng minh định lí đúng với ellipse. Còn trường hợp hyperbol thì sẽ được chứng minh hoàn toàn tương tự.

Trong hệ tọa độ trực chuẩn Oxy, cho ellipse $\mathcal{E}$ có phương trình chính tắc

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

và $M(x_0, y_0)$ thuộc $\mathcal{E}$, tức là

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1.$$



Hình 3.9:

Khi đó, ta có $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, với $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, và

$$\begin{aligned}
MF_1^2 &= (x_0 + c)^2 + y_0^2 = (x_0 + c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right) \\
&= x_0^2 + 2cx_0 + c^2 + b^2 - b^2\frac{x_0^2}{a^2} = x_0^2 + 2cx_0 + a^2 - b^2\frac{x_0^2}{a^2} \\
&= \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x_0^2 + 2cx_0 + a^2 = \frac{c^2}{a^2}x_0^2 + 2cx_0 + a^2 \\
&= \left(\frac{c}{a}x_0 + a\right)^2.
\end{aligned}$$

Vì $x_0 \geq -a$ nên $\frac{c}{a}x_0 \geq -c > -a$ hay $\frac{c}{a}x_0 + a > 0$. Do đó, $MF_1 = \frac{c}{a}x_0 + a$.

Tương tự, thay c bởi $-c$ ta được $MF_2 = -\frac{c}{a}x_0 + a$. Tiếp tuyến của $\mathcal{E}$ tại điểm M nhận vectơ $\overrightarrow{u} = \left(\frac{y_0}{b^2}, -\frac{x_0}{a^2}\right)$ làm vectơ chỉ phương, xem Hình 3.9.

Định lí sẽ được chứng minh nếu ta chứng minh được

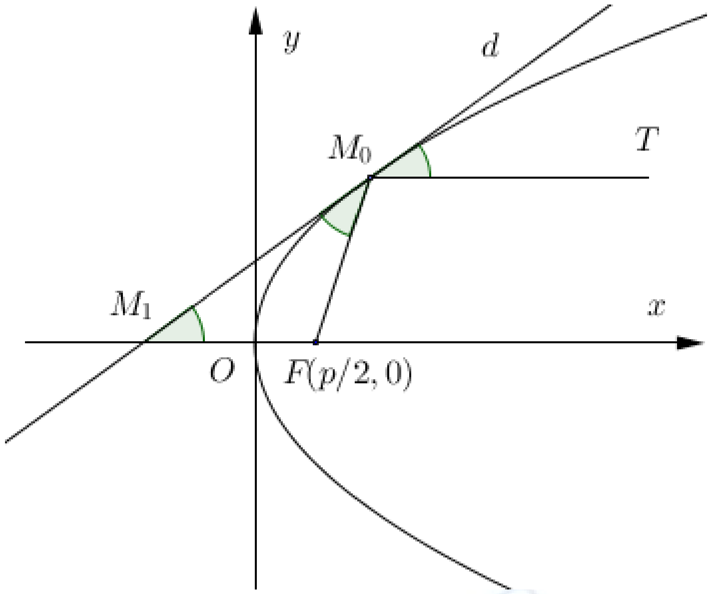
$$\frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{MF_1}|}{|\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{MF_1}|} = \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{MF_2}|}{|\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{MF_2}|}$$

hay

$$\frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{MF_1}|}{|\overrightarrow{MF_1}|} = \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{MF_2}|}{|\overrightarrow{MF_2}|}. \tag{3.18}$$

Đẳng thức (3.18) hoàn toàn chứng minh được bằng cách tính toán trực tiếp. Do vậy, (i) đã được chứng minh.

(ii) Trong hệ tọa độ trực chuẩn Oxy, xét parabol $\mathcal{P}$ có phương trình $y^2 = 2px$ và điểm $M_0(x_0, y_0)$ thuộc $\mathcal{P}$. Ta sẽ chứng minh tiếp tuyến d tại M_0 của parabol $\mathcal{P}$ cắt trục Ox tại M_1 thì $\widehat{FM_1M_0} = \widehat{FM_0M_1}$, xem Hình 3.10.



Hình 3.10:

Ta có tiêu điểm F của $\mathcal{P}$ có $F(p/2,0)$ và $FM_0 = \left|x_0 + \frac{p}{2}\right|$. Đường thẳng d có phương trình

$$d : yy_0 = p(x + x_0).$$

Tọa độ của điểm M_1 là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} yy_0 = p(x + x_0) \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x_0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Suy ra $M_1(-x_0, 0)$. Do đó, $M_1F = \left|x_0 + \frac{p}{2}\right| = M_0F$. Suy ra tam giác FM_0M_1 cân tại F. Vậy, $\widehat{FM_1M_0} = \widehat{FM_0M_1}$. □

Người ta ứng dụng tính chất này của parabol để tạo nên các đèn pha cần chiếu sáng xa, như đèn pha ôtô. Đèn pha gồm có một gương tráng bạc hình paraboloid tròn xoay, xem Hình 3.11. Nếu đặt bóng đèn tại tiêu điểm của parabol, thì thiết diện bổ dọc theo trục đối xứng của đèn pha thì các tia sáng phản xạ song song với trục của đèn pha. Do đó, các đèn pha chiếu sáng xa hơn.

3.1.6 Đường chuẩn của ba đường conic

Trong định nghĩa của parabol, ta đã biết đường chuẩn của parabol là một đường thẳng sao cho khoảng cách từ một điểm M tùy ý trên parabol đến đường thẳng ấy bằng khoảng cách từ điểm M đến tiêu điểm của parabol.

Định nghĩa 3.1.11. *Đường chuẩn* của ellipse (hyperbol) ứng với tiêu điểm $F_i, i = 1, 2$, là đường thẳng $\Delta_i, i = 1, 2$, vuông góc với trục đối xứng chứa hai tiêu điểm, nằm cùng một phía với tiêu điểm F_i đối với trục đối xứng kia và cách tâm của ellipse (hyperbol) một khoảng bằng $\frac{a}{e}$, với $e = \frac{c}{a}$.

Theo trên, các đường conic đều có tiêu điểm F và đường chuẩn Δ tương ứng với tiêu điểm đó. Ta có định nghĩa sau đây phát biểu chung cho ba đường conic.

Hình 3.11: Gương tráng bạc dùng trong các đèn pha.

Định nghĩa 3.1.12. Đường conic là quỹ tích các điểm M sao cho tỉ số khoảng cách từ M đến tiêu điểm F và khoảng cách từ M đến đường chuẩn Δ tương ứng là một hằng số $e > 0$ không đổi. Số e được gọi là *tâm sai* của đường conic.

- $e < 1$: đường ellipse.
- $e = 1$: đường parabol.
- $e > 1$: đường hyperbol.

Lấy hệ tọa độ trực chuẩn có gốc tọa độ F, có trục hoành vuông góc với đường chuẩn Δ. Đặt khoảng cách từ F đến Δ là $FH = p$. Khi đó, đường thẳng Δ có phương trình $x = p$. Với điểm $M(x, y)$, ta có $MF = \sqrt{x^2 + y^2}$ và khoảng cách từ M tới Δ là

$$MK := d(M; \Delta) = |x - p|.$$

Nếu M thuộc đường conic thì $\dfrac{MF}{MK} = e$ hay $\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x - p|} = e$.

Nhận xét 3.1.13. (1) Đường chuẩn của mỗi đường conic không cắt nó.

(2) Người ta không nói đến đường chuẩn của đường tròn, vì hai tiêu điểm của đường tròn trùng với tâm của nó nên trục chứa tiêu điểm không xác định. Vì tâm sai e của đường tròn bằng 0 nên có khi người ta nói đường chuẩn của đường tròn ở xa vô tận.

3.2 Đường bậc hai trong mặt phẳng với mục tiêu affine

3.2.1 Khái niệm

Định nghĩa 3.2.1. Trong mặt phẳng với mục tiêu affine Oxy, tập hợp (C) các điểm mà tọa độ của chúng thỏa mãn phương trình bậc hai

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,$$

trong đó a_{11}, a_{12}, a_{22} không đồng thời bằng 0, được gọi là một *đường bậc hai*.

Ta cũng nói: *đường bậc hai* (C) *có phương trình* $f(x,y) = 0$.

Ví dụ 3.2.2. Đường bậc hai có phương trình $x^2 + y^2 + 1 = 0$ là tập rỗng. Đường bậc hai có phương trình $xy = 0$ là hai đường thẳng $x = 0$ và $y = 0$.

Định nghĩa 3.2.3. Hai đường bậc hai được gọi là *trùng nhau* nếu các phương trình của chúng (trong cùng một mục tiêu affine) *có hệ số tương ứng tỉ lệ*.

Ví dụ 3.2.4. Đường bậc hai (C) có phương trình $x^2 + y^2 = 0$ và đường bậc hai (C') có phương trình $x^2 + 2y^2 = 0$ đều gồm chỉ một điểm duy nhất $O(0,0)$, nhưng chúng là không trùng nhau vì các hệ số tương ứng không tỉ lệ. Nếu xét trong mặt phẳng phức, thì phương trình của (C) có thể viết là $(x - iy)(x + iy) = 0$, do đó (C) là tập hợp gồm hai đường thẳng (ảo) $x - iy = 0$ và $x + iy = 0$; trong khi đó (C') là tập hợp gồm hai đường thẳng (ảo) có phương trình $x - \sqrt{2}iy = 0$ và $x + \sqrt{2}iy = 0$, ở đây i là đơn vị ảo với $i^2 = -1$.

3.2.2 Phương trình chính tắc của đường bậc hai

Giả sử đối với mục tiêu affine Oxy, đường bậc hai (C) có phương trình

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0. \tag{3.19}$$

Ta sẽ tìm một mục tiêu mới sao cho đối với mục tiêu đó phương trình của (C) đơn giản hơn (không có số hạng chứa xy).

Trường hợp 1. Một trong hai số a_{11} và a_{22} khác không, chẳng hạn $a_{11} \neq 0$. Khi đó, ta có

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy = a_{11}\left(x^2 + 2\frac{a_{12}}{a_{11}}xy\right) = a_{11}\left(x + \frac{a_{12}}{a_{11}}y\right)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}y^2,$$

suy ra đổi mục tiêu Oxy thành $Ox'y'$ theo công thức

$$\begin{cases} x' = x + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}y \\ y' = y \end{cases}$$

thì đối với mục tiêu $Ox'y'$ phương trình của (C) sẽ không có số hạng chứa $x'y'$.

Trường hợp 2. Cả hai số a_{11} và a_{12} đều bằng không. Khi đó, $a_{12} \neq 0$ và phương trình (3.19) trở thành

$$2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0.$$

Qua phép đổi mục tiêu Oxy thành mục tiêu $Ox'y'$ theo công thức

$$\begin{cases} x = x' + y' \\ y = x' - y' \end{cases}$$

thì phương trình của (C) trong mục tiêu $Ox'y'$ trở thành

$$2a'_{12}x'^2 - 2a_{12}y'^2 + 2(a_1 + a_2)x' + 2(a_1 - a_2)y' + a_0 = 0.$$

Và phương trình này cũng không có số hạng chứa $x'y'$.

Vậy, ta luôn có thể chọn được một mục tiêu Oxy sao cho phương trình của (C) không có chứa số hạng chữ nhật xy. Do đó, giả sử phương trình của (C) có dạng

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0. \tag{3.20}$$

Ta xét các trường hợp sau đây

(a) $a_{11} \neq 0$ và $a_{22} \neq 0$. Khi đó, có thể viết (3.20) thành

$$a_{11}\left(x^2 + 2\frac{a_1}{a_{11}}x\right) + a_{22}\left(y^2 + 2\frac{a_2}{a_{22}}y\right) + a_0 = 0$$

hay

$$a_{11}\left(x + \frac{a_1}{a_{11}}\right)^2 + a_{22}\left(y + \frac{a_2}{a_{22}}\right)^2 + a_0 - \frac{a_1^2}{a_{11}} - \frac{a_2^2}{a_{22}} = 0.$$

Đổi mục tiêu Oxy thành $O'x'y'$ theo công thức

$$\begin{cases} x' = x + \dfrac{a_1}{a_{11}} \\ \\ y' = y + \dfrac{a_2}{a_{22}} \end{cases}$$

thì phương trình của (C) trở thành

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 = a'_0, \tag{3.21}$$

trong đó $a'_0 = \dfrac{a_1^2}{a_{11}} + \dfrac{a_2^2}{a_{22}} - a_0$.

(i) Nếu $a'_0 \neq 0$, chia hai vế của (3.21) cho a'_0, ta được $\dfrac{a_{11}}{a'_0}x'^2 + \dfrac{a_{22}}{a'_0}y'^2 = 1$. Đổi mục tiêu $O'x'y'$ thành $O'XY$ với

$$\begin{cases} X = \sqrt{\left|\dfrac{a_{11}}{a'_0}\right|}x' \\ \\ Y = \sqrt{\left|\dfrac{a_{22}}{a'_0}\right|}y' \end{cases}$$

thì phương trình của (C) trong mục tiêu $O'XY$ có một trong các dạng

$$\begin{aligned} (I) &\quad X^2 + Y^2 = 1, \\ (II) &\quad X^2 + Y^2 = -1, \\ (III) &\quad X^2 - Y^2 = 1 \text{ hoặc } -X^2 + Y^2 = 1. \end{aligned}$$

Đường bậc hai (C) có phương trình (I) được gọi là *ellipse*.

Đường bậc hai (C) có phương trình (II) được gọi là *ellipse ảo*.

Đường bậc hai (C) có phương trình (III) được gọi là *hyperbol*.

(ii) Nếu $a'_0 = 0$, và a_{11} trái dấu với $a_{22} < 0$, có thể xem $a_{11} > 0$ và $a_{22} < 0$. Đổi mục tiêu $O'x'y'$ thành $O'XY$ với

$$\begin{cases} X = \sqrt{a_{11}}x' \\ Y = \sqrt{-a_{22}}y' \end{cases}$$

thì phương trình của (C) trong mục tiêu $O'XY$ có dạng

$$(IV) \quad X^2 - Y^2 = 0.$$

Do đó, đường bậc hai (C) là *cặp đường thẳng thực cắt nhau* $X + Y = 0$ và $X - Y = 0$.

(iii) Nếu $a'_0 = 0$, và a_{11} cùng dấu với a_{22}, có thể giả sử cùng dấu dương. Đổi mục tiêu $O'x'y'$ thành $O'XY$ với

$$\begin{cases} X = \sqrt{a_{11}}x' \\ Y = \sqrt{a_{22}}y' \end{cases}$$

thì phương trình của (C) trong mục tiêu $O'XY$ có dạng

$$(V) \quad X^2 + Y^2 = 0.$$

Do đó, đường bậc hai (C) là *cặp đường thẳng ảo cắt nhau* tại điểm thực $(0, 0)$. Tuy nhiên, có thể xem (C) là hai *đường thẳng ảo liên hợp* có phương trình $X + iY = 0$ và $X - iY = 0$ nếu xét mặt phẳng có chứa những điểm có tọa độ phức.

(b) Một trong hai số a_{11} và a_{22} bằng không. Không mất tính tổng quát, giả sử $a_{11} \neq 0$ và $a_{22} = 0$. Khi đó, phương trình (3.20) được viết thành

$$a_{11}\left(x + \frac{a_1}{a_{11}}\right)^2 + 2a_2y + a_0 - \frac{a_1^2}{a_{11}} = 0.$$

Đổi mục tiêu Oxy thành $O'x'y'$ theo công thức

$$\begin{cases} x' = x + \dfrac{a_1}{a_{11}} \\ y' = y \end{cases}$$

thì phương trình của (C) trở thành

$$a_{11}x'^2 + 2a_2y' + a'_0 = 0, \tag{3.22}$$

trong đó $a'_0 = a_0 - \dfrac{a_1^2}{a_{11}}$.

(i) Nếu $a_2 \neq 0$, có thể giả sử $a_{11} > 0$ (vì nếu $a_{11} < 0$, nhân hai vế của phương trình (3.22) với -1). Đổi mục tiêu $O'x'y'$ thành $O''XY$ với

$$\begin{cases} X = \sqrt{a_{11}}x' \\ Y = -a_2y' - \dfrac{a'_0}{2} \end{cases}$$

thì phương trình của (C) trong mục tiêu $O''XY$ có dạng

$$(VI) \quad X^2 = 2Y.$$

Đường bậc hai (C) là *parabol*.

(ii) Nếu $a_2 = 0$, và $a'_0 \neq 0$, chia hai vế của phương trình (3.22) cho a'_0 ta được

$$\frac{a_{11}}{a'_0}x'^2 + 1 = 0.$$

Đổi mục tiêu $O'x'y'$ thành $O'XY$ với

$$\begin{cases} X = \sqrt{\left|\dfrac{a_{11}}{a'_0}\right|}x' \\ Y = y' \end{cases}$$

thì phương trình của (C) trong mục tiêu $O'XY$ có một trong các dạng

$$\begin{aligned} (VII) \quad & X^2 - 1 = 0, \\ (VIII) \quad & X^2 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Đường bậc hai (C) có phương trình (VII) là *cặp đường thẳng thực song song*. Đường bậc hai (C) có phương trình $(VIII)$ là *cặp đường thẳng ảo song song*.

(iii) Nếu $a_{22} = a'_0 = 0$, giả sử $a_{11} > 0$, đổi mục tiêu $O'x'y'$ thành $O'XY$ với

$$\begin{cases} X = \sqrt{a_{11}}x' \\ Y = y' \end{cases}$$

thì phương trình của (C) trong mục tiêu $O'XY$ có dạng

$$(IX) \quad X^2 = 0.$$

Đường bậc hai (C) có phương trình (IX) là *cặp đường thẳng thực trùng nhau*.

Tóm lại, bằng cách chọn một mục tiêu affine thích hợp, ta có thể đưa phương trình của một đường bậc hai về một trong chín dạng phương trình ở trên, gọi là các dạng *phương trình chính tắc* của đường bậc hai. Hơn nữa, có thể chứng minh được rằng mỗi đường bậc hai có một và chỉ một dạng phương trình chính tắc. Dưới đây là các dạng phương trình chính tắc của đường bậc hai.

(I) $x^2 + y^2 = 1$ (ellipse),

(II) $x^2 + y^2 = -1$ (ellipse ảo),

(III) $x^2 - y^2 = 1$ (hyperbol),

(IV) $x^2 + y^2 = 0$ (cặp đường thẳng ảo cắt nhau),

(V) $x^2 - y^2 = 0$ (cặp đường thẳng thực cắt nhau),

(VI) $x^2 = 2y$ (parabol),

(VII) $x^2 = 1$ (cặp đường thẳng thực song song),

(VIII) $x^2 = -1$ (cặp đường thẳng ảo song song),

(IX) $x^2 = 0$ (cặp đường thẳng thực trùng nhau).

Ví dụ 3.2.5. Trong mặt phẳng Oxy, hãy tìm phương trình chính tắc của các đường bậc hai dưới đây và xác định xem chúng là đường gì?

(a) $(C): x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 4y = 0$; (b) $(C'): xy - 2x + 2y - 8 = 0$.

Giải.

(a) Ta có

$$\begin{aligned} & x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 4y = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 2xy + y^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-y)^2 + y^2 + 2x - 4y = 0. \end{aligned}$$

Đổi mục tiêu Oxy sang $Ox'y'$ theo công thức

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = y, \end{cases}$$ [4]

ta được $(C): x'^2 + y'^2 + 2(x' + y') - 4y' = 0$ hay $(C): x'^2 + y'^2 + 2x' - 2y' = 0$.

Ta lại có

$$\begin{aligned} & x'^2 + y'^2 + 2x' - 2y' = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x'^2 + 2x' + 1) + (y'^2 - 2y' + 1) - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x'+1)^2 + (y'-1)^2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Đổi mục tiêu $Ox'y'$ sang $O'x''y''$ theo công thức

$$\begin{cases} x'' = x' + 1 \\ y'' = y' - 1, \end{cases}$$ [5]

ta được $(C): x''^2 + y''^2 - 2 = 0$ hay $(C): \dfrac{x''^2}{2} + \dfrac{2y''^2}{2} = 1$. Đổi mục tiêu $O'x''y''$ sang $O'XY$ theo công thức

$$\begin{cases} X = \dfrac{x''}{\sqrt{2}} \\ Y = \dfrac{y''}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

ta được phương trình chính tắc của (C) là $X^2 + Y^2 = 1$. Vậy, (C) là một ellipse.

[4]Trong công thức đổi mục tiêu này, không chứa số hạng tự do nên gốc mục tiêu O không thay đổi.

[5]Trong công thức đổi mục tiêu này, có chứa số hạng tự do nên gốc mục tiêu O đổi thành O'.