MAI QUANG VINH (Chủ biên) - TRẦN THANH PHONG

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

Bình Dương, tháng 10 năm 2015

Mục lục

Giới thiệu

Quyển sách *Hình học giải tích* này được viết cho những sinh viên đã được học một ít về hình học ở bậc phổ thông và đại số tuyến tính ở bậc đại học. Hơn nữa, đây cũng là một tài liệu tham khảo tốt cho những học sinh phổ thông muốn tìm hiểu sâu thêm về hình học giải tích. Trong quyển sách này, chúng tôi đã hệ thống hóa và khái quát hóa các kiến thức hình học giải tích ở THPT và bổ sung những kiến thức mới giúp cho người đọc thấy rằng có thể nghiên cứu hình học bằng nhiều phương pháp khác nhau như phương pháp vectơ, phương pháp tọa độ,.... Phần lớn các tính chất đều được chứng minh chặt chẽ, có thể tìm thấy trong các tài liệu tham khảo, trừ những chứng minh dễ dàng nhận được sẽ dành cho bạn đọc và xem như bài tập. Các tính chất và khái niệm của từng đối tượng sẽ được xét trong những mục tiêu (hệ tọa độ) phù hợp (affine hay trực chuẩn). Đồng thời, nhiều ví dụ được trình bày chi tiết giúp cho việc tìm hiểu lí thuyết tốt hơn. Nội dung của quyển sách được chia làm bốn chương.

Chương 1. Vectơ và tọa độ. Trong chương này, khái niệm vectơ và các phép toán vectơ được trình bày kĩ. Bên cạnh đó, khái niệm hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính, độc lập tuyến tính, tâm tỉ cự và tích hỗn hợp cũng được bổ sung. Về phương pháp tọa độ, mục tiêu affine (hệ tọa độ xiên), hệ tọa độ trực chuẩn trong mặt phẳng và trong không gian được trình bày kĩ, chặt chẽ về cơ sở với mong muốn giúp người đọc có cái nhìn thấu đáu về nền tảng của hình học. Và qua đó, có thể tìm hiểu về các hình học khác tốt hơn, chẳng hạn hình học affine, hình học Euclide. Ở cuối chương, tọa độ cực, tọa độ trụ và tọa độ cầu cũng được giới thiệu sơ lược để giúp người đọc thấy rằng tồn tại nhiều hệ tạo độ khác và bước đầu làm quen với cơ sở cho các môn học Toán khác.

Chương 2. Đường thẳng-Mặt phẳng. Khái niệm và tính chất của đường thẳng trong mặt phẳng và trong không gian đều được hệ thống hóa đầy đủ, cùng với khái niệm và tính chất của mặt phẳng trong không gian. Bên cạnh đó, chúng tôi còn bổ sung vào phần nửa mặt phẳng và nửa không gian, cùng một số ví dụ minh họa việc áp dụng phương pháp tọa độ để giải bài toán hình học.

Chương 3. Đường bậc hai. Ba đường conic (ellipse, hyperbol và parabol) là đối tượng quen thuộc được giới thiệu trước tiên nhằm giúp người đọc dễ tiếp cận với đối tượng chính của chương này là đường bậc hai tổng quát và một số chủ đề liên quan như tâm, phương tiệm cận, ... Đồng thời, các dấu hiệu để nhận biết đường bậc hai nhờ các bất biến của đa thức bậc hai được trình bày chi tiết và đầy đủ. Đây có thể xem là một nội dung đặc biệt thú vị trong chương này.

Chương 4. Mặt bậc hai. Mặt tròn xoay, mặt tròn xoay bậc hai và mặt bậc hai là những đối tượng được xét đến đầu tiên trước khi tiếp cận với mặt bậc hai tổng quát và một số chủ đề liên quan như tâm, giao của mặt bậc hai và mặt phẳng, ... của mặt bậc hai. Và các tính chất của hai mặt kẻ bậc hai đặc biệt, đó là hyperboloid một tầng và paraboloid hyperbolic (hay mặt yên ngựa), cũng được trình bày khá đầy đủ và chi tiết. Bên cạnh đó, các hình ảnh minh họa cho các công trình xây dựng trong thực tế mô phỏng theo một số mặt bậc hai đặc biệt cũng được trình bày nhằm giúp người đọc thấy được toán học không phải là các gì đó xa rời thực tế.

Việc nắm vững một số kiến thức cơ bản về không gian vectơ như cơ sở và tọa độ của vectơ, và dạng toàn phương trong *Đại số tuyến tính* là cần thiết để tiếp cận nội dung của quyển sách này một cách thuận lợi. Ở cuối mỗi chương đều có phần bài tập phong phú để thực hành và củng cố những nội dung lí thuyết được trình bày trước đó. Làm càng nhiều bài tập càng tốt cho việc tìm hiểu và nắm vững những kiến thức liên quan, nhất là đối với việc học Toán học. Có thể nói quyển sách này là kết quả của việc tổng hợp và chọn lọc những phần ưu điểm của các tài liệu tham khảo.

Việc tóm tắt lí thuyết cho mỗi chương sau khi học là rất cần thiết và thú vị. Vì vậy, việc đó được dành cho người đọc. Hy vọng rằng quyển sách này sẽ giúp ích cho sinh viên ngành Toán và có thể dùng làm tài liệu tham khảo cho các bạn đồng nghiệp. Và chúng tôi xin cảm ơn các bạn đồng nghiệp đã nhiệt tình đóng góp ý kiến để quyển sách được hoàn thiện hơn. Rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu để quyển sách được tốt hơn nữa.

Bình Dương, tháng 11 năm 2015

Tác giả

Chương 1

VECTƠ VÀ TỌA ĐỘ

1.1 Khái niệm vectơ. Các phép toán đối với vectơ

1.1.1 Khái niệm vectơ

Định nghĩa 1.1.1. Trong mặt phẳng hoặc trong không gian, cho hai điểm A và B. Đoạn thẳng AB được sắp thứ tự hai điểm mút được gọi là một *vectơ* hay một *đoạn thẳng có hướng*. Một điểm được gọi là *điểm đầu*, điểm còn lại được gọi là *điểm cuối*. Đường thẳng (AB) được gọi là *giá* của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Nếu A là điểm đầu, B là điểm cuối thì vectơ được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$. Vectơ còn có thể kí hiệu là $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}; ..., \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, ...$

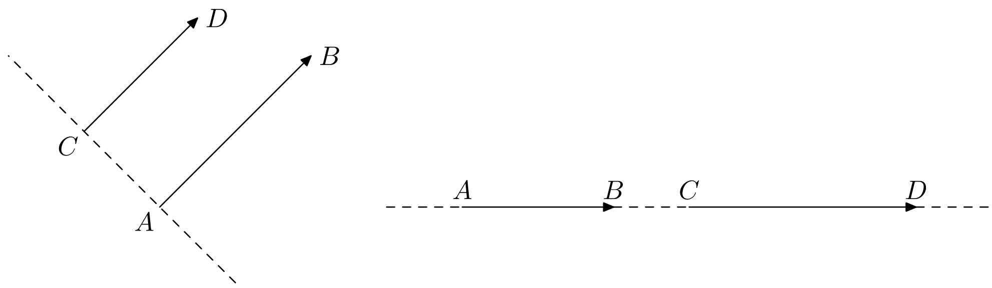
Độ dài của đoạn thẳng AB được gọi là *độ dài* hay *module* của $\overrightarrow{AB}$ và kí hiệu độ dài của $\overrightarrow{AB}$ là $|\overrightarrow{AB}|$. Suy ra hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$ có độ dài bằng nhau.

Định nghĩa 1.1.2. Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ được gọi là hai vectơ *cùng phương* hay *cộng tính* nếu các đường thẳng AB và CD song song hoặc trùng nhau.

Hai vectơ cùng phương $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ được gọi là *cùng hướng* nếu xảy ra một trong hai trường hợp sau đây (xem Hình 1.1):

(i) Nếu hai đường thẳng AB và CD song song và hai điểm B và D nằm cùng phía đối với đường thẳng AC.

(ii) Nếu hai đường thẳng AB và CD trùng nhau và một trong hai tia AB (gốc A) và tia CD (gốc C) chứa tia kia.



Hình 1.1: Hai vectơ cùng hướng.

Hai vectơ cùng phương mà không cùng hướng thì được gọi là hai vectơ *ngược hướng*.

Định nghĩa 1.1.3. Hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ được gọi là *bằng nhau*, kí hiệu $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$, nếu chúng có cùng hướng và cùng độ dài.

Vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{a}$, kí hiệu $-\overrightarrow{a}$, là vectơ ngược hướng với $\overrightarrow{a}$ và có độ dài bằng với độ dài của $\overrightarrow{a}$.

Đặc biệt, vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau như: $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{MM}$,... được gọi là *vectơ-không*, kí hiệu $\overrightarrow{0}$. Độ dài của vectơ-không bằng 0.

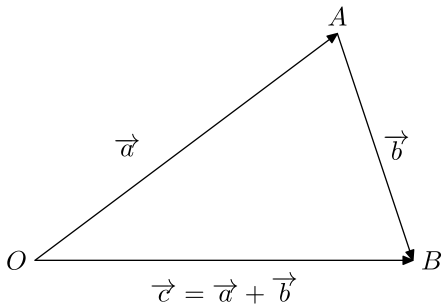
Quy ước: vectơ-không cùng phương và cùng hướng với mọi vectơ. Từ đó suy ra mọi vectơ-không đều bằng nhau.

1.1.2 Các phép toán đối với vectơ

Cộng và trừ vectơ

Định nghĩa 1.1.4. *Tổng* của hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ là một vectơ được xác định như sau: từ một điểm O tùy ý trong không gian, dựng vectơ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, rồi từ A dựng vectơ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$ (xem Hình 1.2). Vectơ $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{OB}$ được gọi là *vectơ tổng* của hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$. Kí hiệu $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$.

Tương tự, ta có thể định nghĩa tổng của n vectơ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$.



Hình 1.2: Cộng vectơ.

Từ định nghĩa suy ra phép cộng vectơ có các tính chất sau.

Mệnh đề 1.1.5. *(i) Giao hoán:* $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$.

(ii) Kết hợp: $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$.

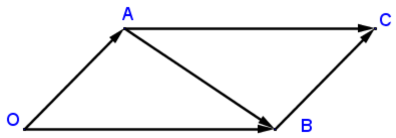
(iii) Có vectơ không: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a}$.

(iv) Có vectơ đối: $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$.

Chứng minh. (i) Đặt $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$ và $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{a}$ xem Hình 1.3. Khi đó, $OACB$ là hình bình hành và theo định nghĩa tổng của hai vectơ, ta có

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB},\\
&\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}\\
&\Longrightarrow \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}.
\end{aligned}$$

Chứng minh của các phần (ii), (iii), (iv) là hoàn toàn tương tự với chứng minh trên. □



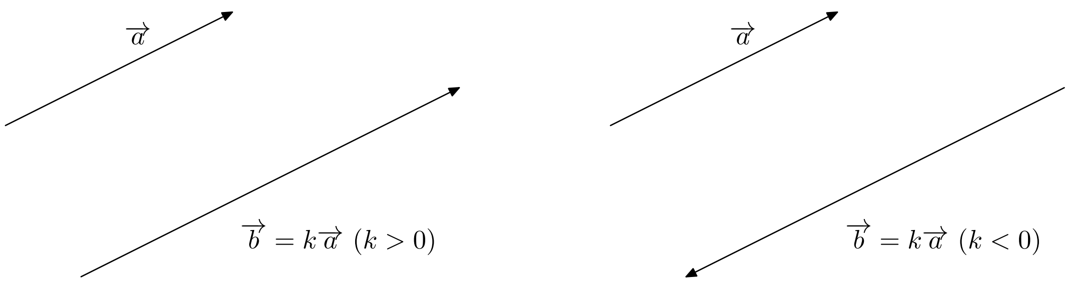
Hình 1.3:

Nhận xét 1.1.6. Vectơ tổng $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ là vectơ đường chéo của hình bình hành nên người ta còn nói phép cộng hai vectơ thực hiện theo quy tắc hình bình hành. Định nghĩa phép cộng hai vectơ như vậy phù hợp với quy tắc hợp hai lực đồng qui trong cơ học.

Định nghĩa 1.1.7. *Hiệu* của hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$, kí hiệu $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, là một vectơ $\overrightarrow{x}$ sao cho $\overrightarrow{b} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{a}$. Người ta gọi vectơ $\vec{x}$ là *vectơ hiệu* và viết $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$.

Nhân một số với một vectơ

Định nghĩa 1.1.8. *Tích* của một số k với một vectơ $\overrightarrow{a}$ là một vectơ, kí hiệu $k\overrightarrow{a}$, có độ dài bằng $|k|.|\overrightarrow{a}|$, cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\overrightarrow{a}$ nếu $k < 0$ (xem Hình 1.4).



Hình 1.4: Nhân một số với vectơ.

Phép nhân một số với một vectơ có các tính chất cơ bản sau đây. Các chứng minh được xem như bài tập.

Mệnh đề 1.1.9. *Với mọi vectơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ và mọi số thực k, l tùy ý, ta có*

(i) $1.\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$.
(ii) $(-1).\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{a}$.
(iii) $k(l\overrightarrow{a}) = (kl)\overrightarrow{a}$.
(iv) $k(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = k\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b}$.
(v) $(k + l)\overrightarrow{a} = k\overrightarrow{a} + l\overrightarrow{a}$.

Khái niệm vectơ và các phép toán đối với vectơ được định nghĩa như trong mục này sẽ làm cho mặt phẳng và không gian trở thành một không gian vectơ trừu tượng theo nghĩa *Đại số tuyến tính*. Tuy nhiên, do mục tiêu của chúng tôi là muốn có một tài liệu tham khảo phù hợp với cả người đọc là học sinh phổ thông nên các khái niệm và phép toán được trình bày một cách sơ cấp.

1.1.3 Hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính, độc lập tuyến tính

Định nghĩa 1.1.10. Cho m vectơ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_m}$ và m số $k_1, k_2, ..., k_m$. Vectơ $k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2} + ... + k_m\overrightarrow{a_m}$ được gọi là một *tổ hợp tuyến tính* của các vectơ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_m}$ với các hệ số $k_1, k_2, ..., k_m$.

Các vectơ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_m}$ được gọi là *phụ thuộc tuyến tính* nếu tồn tại các số $k_1, k_2, ..., k_m$ không đồng thời bằng không sao cho

$$k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2} + ... + k_m\overrightarrow{a_m} = \overrightarrow{0}.$$

Ngược lại, các vectơ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_m}$ được gọi là *độc lập tuyến tính*.[1]

Dưới đây là một số kết quả về sự phụ thuộc tuyến tính, độc lập tuyến tính của hệ vectơ.

Định lí 1.1.11. *Hệ các vectơ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_m}$, $m > 1$, phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi có ít nhất một trong các vectơ ấy là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại.*

Chứng minh. $\Rightarrow$ / Giả sử m vectơ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_m}$ phụ thuộc tuyến tính. Khi đó, có m số $k_1, k_2, ..., k_m$ không đồng thời bằng không sao cho

$$k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2} + ... + k_m\overrightarrow{a_m} = \overrightarrow{0}.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $k_1 \neq 0$. Suy ra

$$\overrightarrow{a_1} = -\frac{k_2}{k_1}\overrightarrow{a_2} - ... - \frac{k_m}{k_1}\overrightarrow{a_m}$$

hay $\overrightarrow{a_1}$ là tổ hợp tuyến tính của $\overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_m}$.

$\Leftarrow$ / Không mất tính tổng quát, giả sử $\overrightarrow{a_m}$ là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_{m-1}}$. Khi đó, có $m-1$ số $x_1, x_2, ..., x_{m-1}$ sao cho

$$\overrightarrow{a_m} = x_1\overrightarrow{a_1} + x_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + x_{m-1}\overrightarrow{a_{m-1}}.$$

Do đó, ta có $x_1\overrightarrow{a_1} + x_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + x_{m-1}\overrightarrow{a_{m-1}} - \overrightarrow{a_m} = \overrightarrow{0}$. Vậy các vectơ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ...$ và $\overrightarrow{a_m}$ phụ thuộc tuyến tính. □

Từ định lí 1.1.11 hệ quả trực tiếp sau đây.

Hệ quả 1.1.12. *(i) Điều kiện cần và đủ để hai vectơ phụ thuộc tuyến tính là chúng cùng phương.*

(ii) Hệ hai vectơ độc lập tuyến tính khi chúng không cùng phương.

(iii) Nếu hệ vectơ chứa vectơ-không thì hệ phụ thuộc tuyến tính.

Định lí 1.1.13. *(i) Ba vectơ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi chúng đồng phẳng*[2]*.*

(ii) Bốn vectơ bất kì trong không gian $\mathbb{R}^3$ đều phụ thuộc tuyến tính.

[1] Hệ vectơ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_m}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi nếu $k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + k_m\overrightarrow{a_m} = \overrightarrow{0}$ thì $k_1 = k_2 = ... = k_m = 0$.

[2] Cùng thuộc một mặt phẳng.

Chứng minh. (i) Giả sử ba vectơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ và $\overrightarrow{c}$ phụ thuộc tuyến tính. Khi đó, có ba số x, y, z không đồng thời bằng không sao cho $x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$. Không mất tính tổng quát, giả sử $x \neq 0$. Suy ra $\overrightarrow{a} = -\dfrac{y}{x}\overrightarrow{b} - \dfrac{z}{x}\overrightarrow{c}$. Do đó, $\overrightarrow{a}$ cùng thuộc mặt phẳng chứa hai vectơ $\overrightarrow{b}$ và $\overrightarrow{c}$. Hay ba vectơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ và $\overrightarrow{c}$ đồng phẳng.

Ngược lại, giả sử $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ và $\overrightarrow{c}$ đồng phẳng. Khi đó, nếu $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ phụ thuộc tuyến tính, tức là có hai số x, y trong $\mathbb{R}$ không đồng thời bằng không sao cho $x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$, thì $x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + 0\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$. Do đó, $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ và $\overrightarrow{c}$ phụ thuộc tuyến tính.

Nếu $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ độc lập tuyến tính, thì do tính đồng phẳng nên vectơ $\overrightarrow{c}$ có thể biểu thị tuyến tính qua $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$, tức là có x, y trong $\mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{c} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b}$ hay $x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$.

(ii) Xét hệ bốn vectơ trong không gian $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ và $\overrightarrow{d}$. Nếu trong bốn vectơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ và $\overrightarrow{d}$ có chứa vectơ-không thì định lí đúng, xem Hệ quả 1.1.12.

Giả sử $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ và $\overrightarrow{d}$ đều khác vectơ-không. Khi đó,

* Nếu trong bốn vectơ trên có hệ ba vectơ phụ thuộc tuyến tính, chẳng hạn $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ và $\overrightarrow{c}$ phụ thuộc tuyến tính, thì có ba số x, y, z trong $\mathbb{R}$ không đồng thời bằng không sao cho $x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$. Do đó, $x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c} + 0\overrightarrow{d} = \overrightarrow{0}$ với x, y, z không đồng thời bằng không. Vậy, hệ bốn vectơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ và $\overrightarrow{d}$ phụ thuộc tuyến tính.

* Xét trường hợp trong bốn vectơ trên có hệ ba vectơ độc lập tuyến tính, chẳng hạn $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ và $\overrightarrow{c}$. Khi đó, lấy một điểm O và đặt các vectơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ và $\overrightarrow{d}$ tại O (xem Hình 1.5). Suy ra có bốn điểm A, B, C, D xác định sao cho $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$ và $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{d}$.

Do ba vectơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ khác $\overrightarrow{0}$ và không đồng phẳng nên dựng được một hình hộp có đường chéo là OD, và ba cạnh cơ sở nằm trên các đường thẳng $(OA), (OB), (OC)$. Theo tính chất của hình hộp, ta có

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{OD_2} + \overrightarrow{OD_3}.$$

Do $\overrightarrow{OD_1}$ và $\overrightarrow{a}$ cùng phương nên

$$\overrightarrow{OD_1} = x\overrightarrow{OA} = x\overrightarrow{a} \text{ với } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Tương tự, có $y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sao cho

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD_2} &= y\overrightarrow{OB} = y\overrightarrow{b},\\ \overrightarrow{OD_3} &= z\overrightarrow{OC} = z\overrightarrow{c}.\end{aligned}$$

Suy ra $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ hay

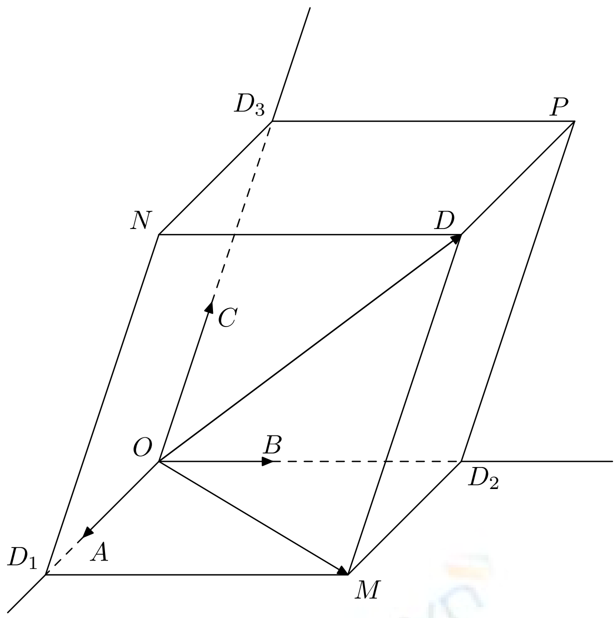
$$x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c} - \overrightarrow{d} = \overrightarrow{0}.$$

Vậy, hệ vectơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ và $\overrightarrow{d}$ phụ thuộc tuyến tính. □

Định lí 1.1.14. *Cho hai vectơ $\overrightarrow{a_1}$ và $\overrightarrow{a_2}$ không cùng phương. Bất kì một vectơ $\overrightarrow{a}$ nào đồng phẳng với $\overrightarrow{a_1}$ và $\overrightarrow{a_2}$ cũng có thể khai triển theo các vectơ ấy, tức là*

$$\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{a_1} + y\overrightarrow{a_2},$$

và sự khai triển ấy là duy nhất.



Hình 1.5: Phân tích vectơ.

Chứng minh. Tồn tại. Do ba vectơ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ và $\overrightarrow{a}$ đồng phẳng nên chúng phụ thuộc tuyến tính, xem Định lí 1.1.13. Và theo giả thiết $\overrightarrow{a_1}$ và $\overrightarrow{a_2}$ độc lập tuyến tính nên có x_1, y_1 thuộc $\mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{a} = x_1\overrightarrow{a_1} + y_1\overrightarrow{a_2}$, xem Định lí 1.1.11.

Duy nhất. Giả sử có x_2, y_2 trong $\mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{a} = x_2\overrightarrow{a_1} + y_2\overrightarrow{a_2}$. Khi đó, ta có

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{a} = (x_1 - x_2)\overrightarrow{a_1} + (y_1 - y_2)\overrightarrow{a_2}.$$

Lại do giả thiết $\overrightarrow{a_1}$ và $\overrightarrow{a_2}$ độc lập tuyến tính nên suy ra

$$0 = x_1 - x_2 = y_1 - y_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

□

Định lí 1.1.15. *Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho ba vectơ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ và $\overrightarrow{a_3}$ không đồng phẳng. Bất kì một vectơ $\overrightarrow{a}$ nào trong không gian cũng có thể khai triển theo các vectơ ấy, tức là*

$$\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{a_1} + y\overrightarrow{a_2} + z\overrightarrow{a_3},$$

và sự khai triển ấy là duy nhất.

Chứng minh. Chứng minh tương tự như chứng minh của Định lí 1.1.14. □

1.1.4 Chiếu vectơ

Định nghĩa 1.1.16. Cho hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ đều khác $\overrightarrow{0}$. Từ O ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$. Khi đó, góc $\widehat{AOB}$ được gọi là *góc hợp bởi hai vectơ* $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$, kí hiệu $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$. Nếu một trong hai vectơ là $\overrightarrow{0}$ thì góc giữa chúng xem bằng bao nhiêu cũng được.

$$\boxed{0^0 \leq (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \leq 180^0.}$$

Nếu $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 90^0$ thì ta nói hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ *trực giao* (hay *vuông góc*), kí hiệu $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$.

Định nghĩa 1.1.17. Một đường thẳng trên đó đã chọn một vectơ đơn vị[3] được gọi là một *trục*. Hướng của vectơ đơn vị được gọi là *hướng của trục*.

Định nghĩa 1.1.18. Cho trục Δ có vectơ đơn vị $\overrightarrow{e}$ và vectơ $\overrightarrow{a}$ khác vectơ-không. Góc giữa $\overrightarrow{a}$ và trục Δ là góc giữa vectơ $\overrightarrow{a}$ và vectơ $\overrightarrow{b}$ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{e}$ sao cho $0^0 \leq (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \leq 90^0$.

Cho một trục Δ với $\overrightarrow{e}$ là vectơ đơn vị, một mặt phẳng P không song song với Δ và một $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ tùy ý trong không gian. Qua A và B dựng các mặt phẳng song song với P cắt Δ ở A_1 và B_1. Các điểm A_1 và B_1 được gọi là các *điểm chiếu* của các điểm A và B (tương ứng) trên Δ theo phương P. Vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$ được gọi là *vectơ chiếu* (hay *hình chiếu*) của $\overrightarrow{AB}$ trên Δ theo phương P. Kí hiệu $\mathrm{pr}_\Delta^P \overrightarrow{AB}$.

Khi đó, ta có $\overrightarrow{A_1B_1} = p\overrightarrow{e}$, $p > 0$ nếu $\overrightarrow{A_1B_1}$ và $\overrightarrow{e}$ cùng hướng; $p < 0$ nếu $\overrightarrow{A_1B_1}$ và $\overrightarrow{e}$ ngược hướng. Số p được gọi là *độ dài hình chiếu* của vectơ $\overrightarrow{AB}$ trên trục Δ theo phương P và kí hiệu

$$p = |\,\mathrm{pr}_\Delta^P \overrightarrow{AB}| \text{ hay } p = |\,\mathrm{pr}_\Delta^P \overrightarrow{a}|.$$

Người ta còn gọi p là *độ dài đại số* của A_1B_1 và kí hiệu $p = \overline{A_1B_1}$.

Dưới đây là một số tính chất cơ bản của phép chiếu vectơ mà chứng minh không được trình bày ở đây và có thể tìm thấy trong [?].

Mệnh đề 1.1.19. *(i) Các vectơ bằng nhau có hình chiếu (trên cùng một trục, theo cùng một phương) bằng nhau, tức là*

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \Longrightarrow \mathrm{pr}_\Delta^P \overrightarrow{a} = \mathrm{pr}_\Delta^P \overrightarrow{b}.$$

(ii) Hình chiếu của vectơ tổng bằng tổng các hình chiếu của các vectơ thành phần, nghĩa là

$$\mathrm{pr}_\Delta^P(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \mathrm{pr}_\Delta^P \overrightarrow{a} + \mathrm{pr}_\Delta^P \overrightarrow{b}.$$

Mệnh đề sau đây chỉ đúng trong trường hợp mặt phẳng P vuông góc với Δ (phép chiếu vuông góc).

Mệnh đề 1.1.20. *Độ dài của hình chiếu của một vectơ trên một trục bằng độ dài của vectơ nhân với cosin của góc giữa trục và vectơ.*

1.1.5 Tích vô hướng của hai vectơ

Định nghĩa 1.1.21. Cho hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ bất kì. *Tích vô hướng* của hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$, kí hiệu $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$, là số thực $|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$.

$$\boxed{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}).}$$

Từ định nghĩa suy ra hai vectơ trực giao với nhau khi và chỉ khi tích vô hướng của chúng bằng 0. Và $\overrightarrow{a}^2 = |\overrightarrow{a}|^2$. Dưới đây là một số tính chất cơ bản đã biết của tích vô hướng.

[3]Vectơ có độ dài bằng 1.

Mệnh đề 1.1.22. *Cho ba vectơ* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ *bất kì và các số thực* k, l *tùy ý. Ta có*

(i) Giao hoán: $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$.

(ii) $(k\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = k(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})$.

(iii) Phân phối với phép cộng vectơ: $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$.

Chứng minh. (i) Theo định nghĩa của góc giữa hai vectơ, ta có $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a})$. Do đó,

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{b}||\overrightarrow{a}|\cos(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}) = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}.$$

(ii) Ta có

$$(k\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = |k\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos(k\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = |k||\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos(k\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}).$$

* Nếu $k \geq 0$, thì $k\overrightarrow{a}$ cùng hướng với $\overrightarrow{a}$. Do đó, $(k\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$. Suy ra $|k||\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos(k\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = k|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos(k\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = k|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$.

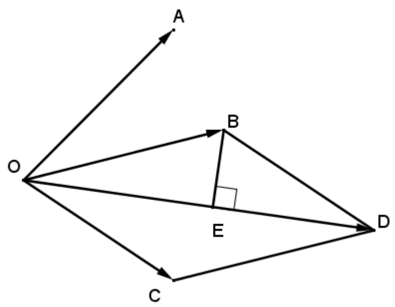
* Nếu $k < 0$, thì $k\overrightarrow{a}$ ngược hướng với $\overrightarrow{a}$. Do đó, $(k\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \pi - (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$. Suy ra

$$\begin{aligned} |k||\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos(k\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) &= -k|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos(k\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \\ &= -k|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos(\pi - (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})) \\ &= k|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}). \end{aligned}$$

Vậy, $(k\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = k(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})$.

(iii) Xét $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ và $\overrightarrow{c}$ là ba vectơ tùy ý. Đặt $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{d} = \overrightarrow{OD}$ và điểm E là hình chiếu vuông góc của B lên OD như Hình 1.6. Gọi

$$\begin{aligned} &\alpha = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \widehat{AOB}, \\ &\beta = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}) = \widehat{AOD}, \\ &\gamma = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) = \widehat{AOC}, \\ &\delta = (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}) = \widehat{BOD}, \\ &\theta = (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}) = \widehat{COD}. \end{aligned}$$



Hình 1.6:

Khi đó, $(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \widehat{BOC} = \delta + \theta = \gamma - \alpha$ và đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}
& OD\cos\beta = OB\cos\alpha + OC\cos\gamma \\
\Leftrightarrow\ & OD\cos\beta\sin\delta\sin\theta = OB\cos\alpha\sin\delta\sin\theta + OC\cos\gamma\sin\delta\sin\theta \\
\Leftrightarrow\ & OE\cos\beta\sin\delta\sin\theta + ED\cos\beta\sin\delta\sin\theta = OB\cos\alpha\sin\delta\sin\theta + OC\cos\gamma\sin\delta\sin\theta \\
\Leftrightarrow\ & BE\cos\beta(\cos\delta\sin\theta + \sin\delta\cos\theta) = BE(\cos\alpha\sin\theta + \cos\gamma\sin\delta) \\
\Leftrightarrow\ & \cos\beta(\cos\delta\sin\theta + \sin\delta\cos\theta) = \cos\alpha\sin\theta + \cos\gamma\sin\delta \\
\Leftrightarrow\ & \cos\beta\sin(\delta+\theta) = \cos\alpha\sin\theta + \cos\gamma\sin\delta \\
\Leftrightarrow\ & \cos\beta\sin(\gamma-\alpha) = \cos\alpha\sin(\gamma-\beta) + \cos\gamma\sin(\beta-\alpha).
\end{aligned}$$

Bằng tính toán trực tiếp, đẳng thức cuối cùng là đúng. □

Ví dụ 1.1.23. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $BC = 4$ và góc $\widehat{ABC} = 60^0$. Hãy tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$.

Giải.

Ta có $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = AB.BC\cos 60^0 = 6$.

Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC, ta tính được $CA = \sqrt{13}$. Lại áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC tại góc $\widehat{C}$, ta được

$$BC.CA\cos\widehat{C} = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2} = 10.$$

Do đó, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = BC.CA\cos(\pi - \widehat{C}) = -BC.CA\cos\widehat{C} = -10$.

1.2 Mục tiêu affine trong mặt phẳng

1.2.1 Mục tiêu affine-Tọa độ

Định nghĩa 1.2.1. Trong mặt phẳng, chọn một điểm O và hai vectơ không cộng tuyến $\overrightarrow{i}$ và $\overrightarrow{j}$. Khi đó, bộ ba $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ được gọi là một *mục tiêu affine*, hay còn gọi là *hệ tọa độ affine*.

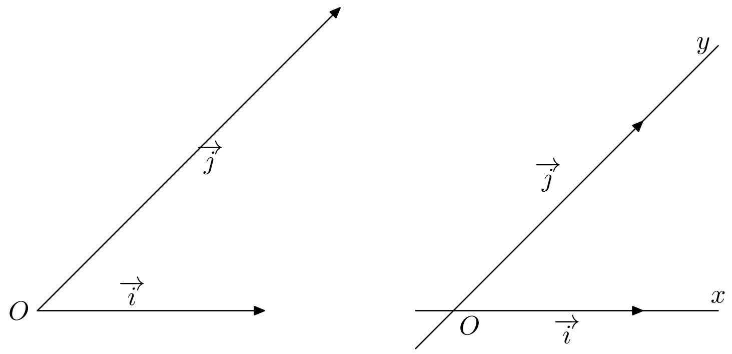
Cặp hai vectơ có thứ tự $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ gọi là *cơ sở vectơ* của hệ tọa độ.

Ta cũng kí hiệu mục tiêu đó là Oxy, với Ox, Oy là các đường thẳng đi qua O và có vectơ chỉ phương lần lượt là $\overrightarrow{i}$ và $\overrightarrow{j}$.

Điểm O được gọi là *gốc tọa độ*, các đường thẳng Ox và Oy gọi là *các trục tọa độ*, Ox là *trục hoành* và Oy là *trục tung* (xem Hình 1.7).

Tọa độ của vectơ

Định nghĩa 1.2.2. Xét mặt phẳng với mục tiêu affine $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Một vectơ $\overrightarrow{u}$ bất kì của mặt phẳng được phân tích một cách duy nhất theo hai vectơ cơ sở $\overrightarrow{i}$ và $\overrightarrow{j}$ (xem Định lí 1.1.14), tức là có duy nhất cặp số thực (x, y) sao cho $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$. Khi đó, cặp số thực (x, y) được gọi là *tọa độ* của vectơ $\overrightarrow{u}$ đối với mục tiêu đã cho và kí hiệu $\overrightarrow{u}\big|_{(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})} = (x, y)$.



Hình 1.7: Mục tiêu affine trong mặt phẳng.

Có thể viết là $\overrightarrow{u} = (x, y)$ nếu không sợ nhầm lẫn về mục tiêu. Ta có

$$\boxed{\overrightarrow{u} = (x, y) \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}.}$$

Ta có kết quả sau đây.

Mệnh đề 1.2.3. *(i) Hai vectơ bằng nhau khi và chỉ khi tọa độ của chúng bằng nhau.*

(ii) Nếu $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2)$ và $k \in \mathbb{R}$ thì $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ và $k\overrightarrow{u} = (kx_1, ky_1)$.

(iii) Nếu $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1) \neq \overrightarrow{0}$ và $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2) \neq \overrightarrow{0}$ cộng tuyến thì các tọa độ của chúng tỉ lệ.

Chứng minh. (i) Xét hai vectơ $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$. Giả sử $\overrightarrow{u}\big|_{(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})} = (x_1, y_1)$ và $\overrightarrow{v}\big|_{(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})} = (x_2, y_2)$. Khi đó, ta có

$$\overrightarrow{u} = x_1\overrightarrow{i} + y_1\overrightarrow{j}, \overrightarrow{v} = x_2\overrightarrow{i} + y_2\overrightarrow{j}.$$

Do đó,

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \\ \Leftrightarrow\ & x_1\overrightarrow{i} + y_1\overrightarrow{j} = x_2\overrightarrow{i} + y_2\overrightarrow{j} \\ \Leftrightarrow\ & (x_1 - x_2)\overrightarrow{i} + (y_1 - y_2)\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Các chứng minh của (ii) và (iii) là hoàn toàn tương tự và xem như bài tập. □

Tọa độ của điểm

Định nghĩa 1.2.4. Trên mặt phẳng với mục tiêu affine Oxy, với mọi điểm M bất kì của mặt phẳng, tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là *tọa độ* của điểm M đối với mục tiêu đã cho và kí hiệu $M(x, y)$ hay $M = (x, y)$.

Nếu $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ thì

$$\boxed{\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).}$$

1.2.2 Đổi mục tiêu affine

Cho hai mục tiêu affine $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ và $(O'; \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'})$. Giả sử điểm M có tọa độ (x, y) đối với mục tiêu $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, có tọa độ (x', y') đối với mục tiêu $(O'; \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'})$. Và giả sử đối với mục tiêu $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ điểm O' và các vectơ $\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}$ có tọa độ là

$$O'(a_0, b_0), \ \overrightarrow{i'} = (a_1; b_1), \ \overrightarrow{j'} = (a_2, b_2),$$

tức là

$$\begin{aligned} \overrightarrow{i'} &= a_1 \overrightarrow{i} + b_1 \overrightarrow{j}, \\ \overrightarrow{j'} &= a_2 \overrightarrow{i} + b_2 \overrightarrow{j}, \\ \overrightarrow{OO'} &= a_0 \overrightarrow{i} + b_0 \overrightarrow{j}. \end{aligned}$$

Theo giả thiết, ta có $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{O'M} = x'\overrightarrow{i'} + y'\overrightarrow{j'}$. Suy ra

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O'M} &= x'\overrightarrow{i'} + y'\overrightarrow{j'} = x'(a_1\overrightarrow{i} + b_1\overrightarrow{j}) + y'(a_2\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j}) \\ &= (a_1x' + a_2y')\overrightarrow{i} + (b_1x' + b_2y')\overrightarrow{j}. \end{aligned}$$

Mặt khác, $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'} = (x - a_0)\overrightarrow{i} + (y - b_0)\overrightarrow{j}$, suy ra

$$\begin{cases} a_1x' + a_2y' = x - a_0 \\ b_1x' + b_2y' = y - b_0 \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} x = a_1x' + a_2y' + a_0 \\ y = b_1x' + b_2y' + b_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Khi đó, ta có ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix},$$

được gọi là *ma trận của phép đổi mục tiêu* (1.1)[4]. Dễ thấy $\det A \neq 0$.

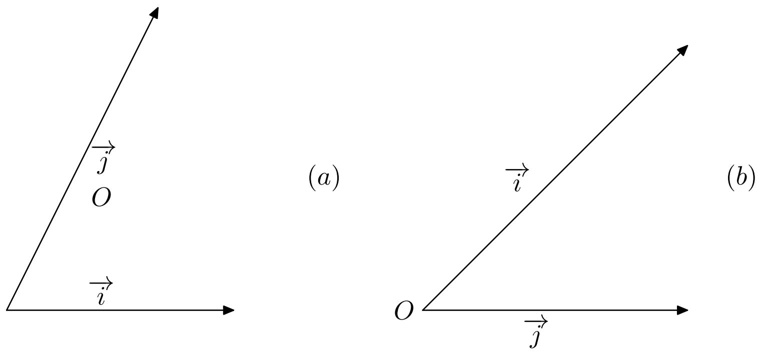
Công thức (1.1) được gọi là *công thức đổi mục tiêu affine*.

Nếu $\det A > 0$ thì hai hệ tọa độ đã cho được gọi là *cùng hướng*; ngược lại, được gọi là *ngược hướng*.

Dễ thấy, tính chất cùng hướng là một quan hệ tương đương trên tập tất cả các mục tiêu affine trên mặt phẳng. Tập hợp các mục tiêu affine trong mặt phẳng được chia thành hai lớp tương đương. Nếu qui ước gọi các mục tiêu thuộc một lớp là *mục tiêu thuận* (hay *có hướng thuận*) thì các mục tiêu thuộc lớp còn lại gọi là *mục tiêu nghịch* (hay *có hướng nghịch*). Khi đó, mặt phẳng được gọi là *mặt phẳng định hướng*. Ta thường lấy mục tiêu thuận là mục tiêu có số đo của góc định hướng giữa hai vectơ $\overrightarrow{i}$ và $\overrightarrow{j}$ là dương; ngược lại, là mục tiêu nghịch.

[4]Công thức (1.1) có thể viết dưới dạng ma trận như sau

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}.$$



Hình 1.8: (a) Mục tiêu affine thuận, (b) Mục tiêu affine nghịch.

Ví dụ 1.2.5. (1) Trong mặt phẳng, hãy viết công thức đổi mục tiêu từ mục tiêu $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ sang mục tiêu $(O';\overrightarrow{i'},\overrightarrow{j'})$ biết

$$\begin{aligned}\overrightarrow{i'} &= \overrightarrow{i}-\overrightarrow{j},\\ \overrightarrow{j'} &= -2\overrightarrow{j},\\ \overrightarrow{OO'} &= 2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}.\end{aligned}$$

Giải.

Theo giả thiết, ta có tọa độ của O', $\overrightarrow{i'}$ và $\overrightarrow{j'}$ đối với mục tiêu $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ lần lượt là $(2,-1)$, $(1,-1)$ và $(0,-2)$.

Do đó, công thức đổi mục tiêu cần tìm là

$$\begin{cases} x = x' + 2\\ y = -x' - 2y' - 1.\end{cases}$$

(2) Trong mặt phẳng với mục tiêu affine đã chọn, cho $O(1,1), O'(0,1)$ và $\overrightarrow{i} = (1,1)$, $\overrightarrow{j} = (1,2)$, $\overrightarrow{i'} = (2,-1)$ và $\overrightarrow{j'} = (1,-1)$.

(a) Chứng minh rằng $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ và $(O';\overrightarrow{i'},\overrightarrow{j'})$ là hai mục tiêu.

(b) Hãy viết công thức đổi mục tiêu từ $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ sang $(O';\overrightarrow{i'},\overrightarrow{j'})$.

(c) Hai mục tiêu trên có cùng hướng không?

(d) Hãy tìm điểm N và tọa độ của N đối với mục tiêu $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ khi biết $N\big|_{(O';\overrightarrow{i'},\overrightarrow{j'})} = (-1,1)$.

(e) Hãy tìm những điểm có cùng tọa độ đối với hai mục tiêu trên.

Giải.

(a) Xét hệ vectơ $\{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\}$. Ta có

$$\begin{aligned} & x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}\\ \Leftrightarrow\quad & x(1,1) + y(1,2) = (0,0)\\ \Leftrightarrow\quad & \begin{cases} x + y = 0\\ x + 2y = 0\end{cases} \quad \Leftrightarrow x = y = 0.\end{aligned}$$

Suy ra $\overrightarrow{i}$ và $\overrightarrow{j}$ độc lập tuyến tính. Vậy, $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ là mục tiêu.

Lập luận tương tự, ta cũng chứng minh được $(O';\overrightarrow{i'},\overrightarrow{j'})$ là mục tiêu.

(b) Ta có $\overrightarrow{OO'} = (-1, 0)$.

Xét

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{OO'} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} \\ \Leftrightarrow\quad & (-1, 0) = x(1, 1) + y(1, 2) \\ \Leftrightarrow\quad & \begin{cases} x + y = -1 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $O'\big|_{(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})} = (-2, 1)$.

Lập luận tương tự, ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{i'}\big|_{(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})} &= (5, -3), \\ \overrightarrow{j'}\big|_{(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})} &= (3, -2). \end{aligned}$$

Do đó, công thức đổi mục tiêu cần tìm là

$$\begin{cases} x = 5x' + 3y' - 2 \\ y = -3x' - 2y' + 1. \end{cases}$$

(c) Ma trận của phép đổi mục tiêu là

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Do $\det A = -1 < 0$ nên hai mục tiêu đã cho ngược hướng.

(d) Gọi $N(a, b)$. Theo giả thiết $N\big|_{(O';\overrightarrow{i'},\overrightarrow{j'})} = (-1, 1)$, suy ra

$$\overrightarrow{O'N} = -\overrightarrow{i'} + \overrightarrow{j'} = (-1, 0).$$

Do đó, $\overrightarrow{O'N} = (a, b - 1) = (-1, 0)$ hay

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 1. \end{cases}$$

Vậy, $N(-1, 1)$.

Cũng theo giả thiết $N\big|_{(O';\overrightarrow{i'},\overrightarrow{j'})} = (-1, 1)$, ta thay $x' = -1, y' = 1$ vào công thức đổi mục tiêu, ta được $x = -4, y = 2$. Do đó, $N\big|_{(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})} = (-4, 2)$.

(e) Những điểm M cần tìm có tọa độ đối với hai mục tiêu trên là nghiệm hệ

$$\begin{cases} x' = 5x' + 3y' - 2 \\ y' = -3x' - 2y' + 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y' = -2/3. \end{cases}$$

Do đó, điểm $M\big|_{(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})} = (1, -2/3)$ hay $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{i} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{j}$. Suy ra điểm thỏa yêu cầu bài toán là $M(4/3, 2/3)$ (xem câu (d)).