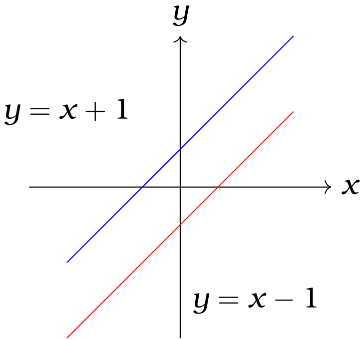
Hệ phương trình 2×2

Ví dụ 3.1.

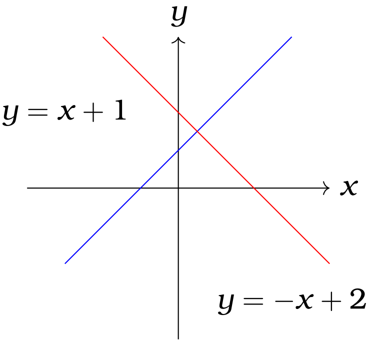
Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x - y = -1 \\ x - y = 1 \end{cases}$



Nhận xét: Hai đường thẳng không có điểm chung $\Longrightarrow$ HPT vô nghiệm

Ví dụ 3.2.

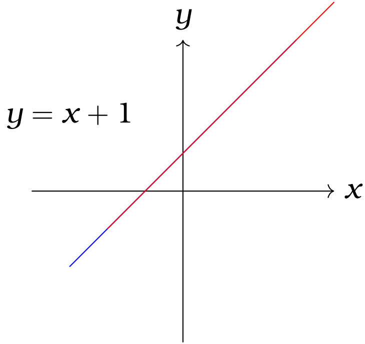
Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 2 \end{cases}$



Nhận xét: Hai đường thẳng có 1 điểm chung $\Longrightarrow$ HPT có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 3.3.

Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} -x+y=1 \\ -x+y=1 \end{cases}$

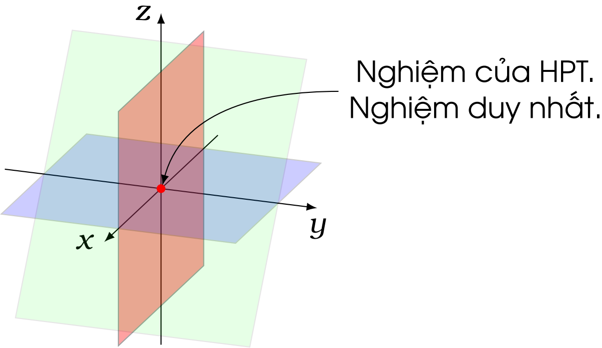


Nhận xét: Hai đường thẳng có vô số điểm chung $\Longrightarrow$ HPT có vô số nghiệm.

Hệ phương trình 3×3

Ví dụ 3.4.

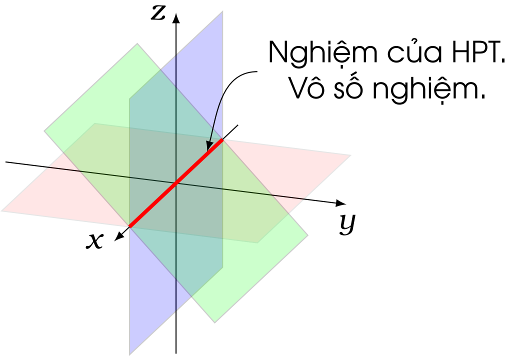
Xét hệ phương trình sau: $\begin{cases} 3x + 0y + 2z = 0 \\ 0x + y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + z = 0 \end{cases}$



Ngày 24 tháng 10 năm 2022

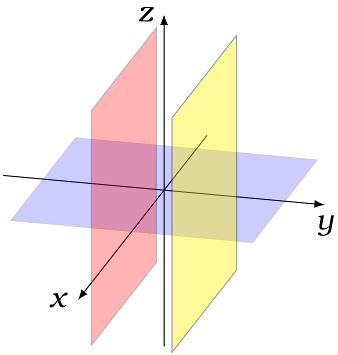
Ví dụ 3.5.

Xét hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0x + \quad y + \quad z = 0 \\ 0x + \quad y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + \quad z = 0 \end{cases}$



Ví dụ 3.6.

Xét hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0x + 3y + 2z = 0 \\ 0x + y + 0z = -1 \\ 0x + 0y + z = 1 \end{cases}$



HPT Vô nghiệm.

HỆ PHƯƠNG TRÌNH $n \times m$

Định nghĩa 3.1.
Hệ phương trình tuyến tính (HPT-TT) gồm m phương trình, n ẩn có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2}$$

trong đó $a_1, \ldots, a_{mn}$ và $b_1, \ldots, b_m$ là các số thực.

1. Nếu $b_1 = \ldots = b_m = 0$ thì nó được gọi HPT-TT thuần nhất.
2. Nếu tồn tại $b_i \neq 0$ với mọi $i = 1, \ldots, m$ thì nó được gọi HPT-TT không thuần nhất.

Định nghĩa 3.2.

Hệ phương trình (2) có thể được viết về dạng như sau:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B}$$

hoặc dạng ma trận mở rộng như sau:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Định nghĩa 3.3.

Bộ $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, tức là $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n.$, được gọi là nghiệm của HPT-TT (2) nếu nó thoả mãn tất cả các phương trình trong HPT (2).

Ví dụ 3.7.

$x = \left(\frac{11}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ là nghiệm của HPT sau: $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 9x_2 = 3 \end{cases}$

Định nghĩa 3.4.

Hai HPT-TT được gọi là tương đương khi có cùng tập nghiệm.

Ví dụ 3.8.

Hệ HPT sau là tương đương

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 4x_1 + x_2 = 6 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} 4x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$$

Định lý Kronecker–Capelli

Định lý 3.1.

Cho $r(A)$ và $r(A|B)$ lần lượt là hạng của ma trận hệ số và ma trận mở rộng của HPT $Ax = B$. Ta có,

1. $r(A) \neq r(A|B) \iff$ HPT (2) vô nghiệm.
2. $r(A) = r(A|B) \iff$ HPT (2) có nghiệm.
   - $r(A) = r(A|B) = n \iff$ HPT (2) có duy nhất nghiệm.
   - $r(A) = r(A|B) < n \iff$ HPT (2) có vô số nghiệm.

Phương pháp khử Gauss giải HPT $Ax = b$

1. Lập ma trận mở rộng $(A|B)$;
2. Dùng biến đổi sơ cấp đối với hàng đưa ma trận mở rộng về dạng bậc thang. Sử dụng Định lý trên, xác định số nghiệm của HPT.
3. Viết HPT tương ứng với ma trận bậc thang.
4. Tìm lần lượt x_n, sau đó $x_{n-1}, \ldots, x_1$.