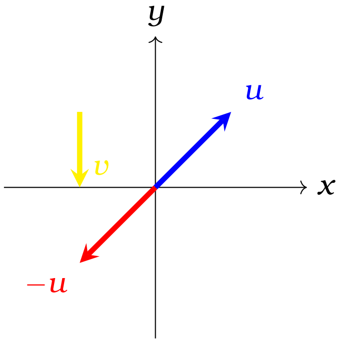
Nhắc lại

Định nghĩa 4.1.
Véc tơ là một đoạn thẳng có hướng.

Ví dụ 4.1.
Trong không gian Oxy.



Tính chất 4.1.

Cho $x = (x_1, x_2)$ và $y = (y_1, y_2)$ là hai véc tơ trong $\mathbb{R}^2$ và k là số thực. Ta có

1. $kx = (kx_1, kx_2)$;
2. $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$;
3. $x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2)$;
4. Độ dài của véc tơ : $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Tính chất 4.2.

Cho $x = (x_1, x_2, x_3)$ và $y = (y_1, y_2, y_3)$ là hai véc tơ trong $\mathbb{R}^3$ và k là số thực. Ta có

1. $kx = (kx_1, kx_2, kx_3)$;
2. $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$;
3. $x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3)$;
4. Độ dài của véc tơ : $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Định nghĩa 4.2.

Không gian véc tơ V là tập V khác rỗng và được trang bị hai phép toán

1. $x + y \in V$ với mọi $x, y \in V$;
2. $\alpha x \in V$ với mọi $x \in V$ và $\alpha \in \mathbb{R}$;

Tiên đề

1. $x + y = y + x$;
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3. Tồn tại véc tơ không, ký hiệu 0 sao cho $x + 0 = x$;
4. Mọi x thuộc V, tồn tại véc tơ $-x$ sao cho $x + (-x) = 0$;
5. Với mọi $\alpha, \beta \in K$ và mọi véc tơ $x \in V : (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
6. Với mọi $\alpha \in K$ và mọi véc tơ $x \in; V : (x + y)\alpha = \alpha x + \alpha y$;
7. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
8. $1.x = x$.

Định nghĩa 4.3.

Cho $S = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ là tập hợp các véc tơ trong không gian véc tơ V. Véc tơ $b \in V$ được gọi tổ hợp tuyến tính của các véc tơ trong S nếu tồn tại các số thực $x_1, x_2, \dots, x_m$ sao cho

$$b = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_m a_m$$

Nói cách khác, véc tơ b được biểu diễn bởi các véc tơ trong S.

Ví dụ 4.2.

Hãy biểu diễn véc tơ $x = (2, 3, 5) \in \mathbb{R}^3$ qua các véc tơ trong $S = \{v_1 = (-2, -3, 4), v_2 = (2, 3, 2)\} \subset \mathbb{R}^3$.

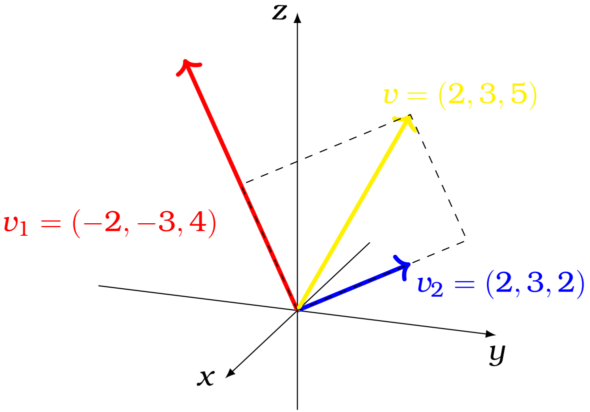
Lời giải:

➤ Cho $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ta xét biểu thức sau:

$$\begin{aligned} x &= c_1 v_1 + c_2 v_2 \\ \iff (2, 3, 5) &= c_1(-2, -3, 4) + c_2(2, 3, 2) \end{aligned}$$

➤ Ta có hpt sau:

$$\begin{cases} -2c_1 + 2c_2 = 2 \\ -3c_1 + 3c_2 = 3 \\ 4c_1 + 2c_2 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{2} \\ c_2 = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$ Vậy ta có $x = \dfrac{1}{2}v_1 + \dfrac{3}{2}v_2$.



LIÊN HỆ GIỮA TỔ HỢP TUYẾN TÍNH VÀ HPT

Giả sử $a_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}), b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

Ta kí hiệu: $A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ và $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

Khi đó, b là một tổ hợp tuyến tính của hệ S

$\Leftrightarrow x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_m a_m = b$ có nghiệm

$\Leftrightarrow x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_m A_m = B$ có nghiệm

$\Leftrightarrow AX = B$ có nghiệm, với $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_m \end{pmatrix}$

Ví dụ 4.3.

Trong $\mathbb{R}^3$ cho $u=(1,-1,2)$, $v=(1,1,-1)$, $w=(-1,-3,4)$. Cho biết $x=(1,-3,5)$ có phải là một tổ hợp tuyến tính của $\{u,v,w\}$ không? Nếu có, chỉ ra một cách biểu diễn của x theo u,v,w.

Lời giải: Giả sử $x=au+bv+cw$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow (1,-3,5)=(a,-a,2a)+(b,b,-b)+(-c,-3c,4c)$

$\Leftrightarrow (1,-3,5)=(a+b-c,-a+b-3c,2a-b+4c)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b-c=1\\ -a+b-3c=-3\\ 2a-b+4c=5\end{cases}$$

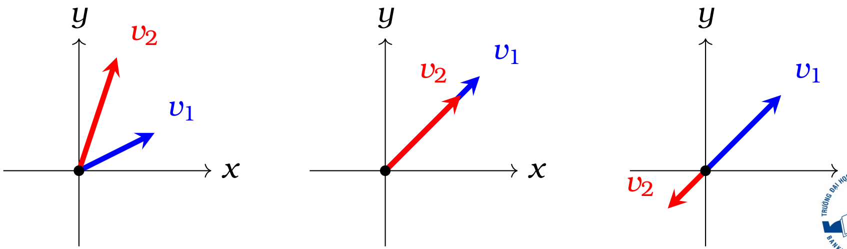
$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -3 & -3\\ 2 & -1 & 4 & 5\end{array}\right)\xrightarrow[d_3\to d_3-2d_1]{d_2\to d_2+d_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -4 & -2\\ 0 & -3 & 6 & 3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_2\to\frac{1}{2}d_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2 & -1\end{array}\right)$$

Hpt $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b-c=1\\ b-2c=-1\end{cases}$. Chọn $c=0$ ta được $b=-1, a=2$.

Định nghĩa 4.4.

- Hệ $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính
  $\Leftrightarrow$ Tồn tại một vectơ $a_j \in S$ là tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại.
  $\Leftrightarrow$ Tồn tại bộ số $x_1, x_2, \ldots, x_m$ với ít nhất một $x_j \neq 0$ sao cho
  $$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_ma_m = 0$$
  $\Leftrightarrow$ $AX = 0$ có nghiệm không tầm thường với A được định nghĩa ở trên.
- Ngược lại S là hệ độc lập tuyến tính.



đltt pttt

Ví dụ 4.4.

Cho $S = \{(1,0,0,1),(0,2,1,0),(1,-1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^4$. CMR S độc lập tuyến tính.

Lời giải: Cách 1. Lấy $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Xét hệ thức sau:

$$c_1(1,0,0,1) + c_2(0,2,1,0) + c_3(1,-1,1,1) = (0,0,0,0)$$

$$\iff \begin{cases} c_1 \qquad\qquad + c_3 = 0 \\ \qquad 2c_2 - c_3 = 0 \\ \qquad\ \ c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 \qquad\qquad + c_3 = 0 \end{cases} \iff c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

$\Longrightarrow S$ độc lập tuyến tính.

Cách 2. Ta xét

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Do $r(A) = 3 = n \Longrightarrow S$ độc lập tuyến tính.

Nhận xét: Trong trường hợp S gồm n vectơ $n-$chiều. Khi đó

1. S độc lập tuyến tính $\Longleftrightarrow AX = 0$ có nghiệm duy nhất $X = 0$

$$\Longleftrightarrow det(A) \neq 0 \text{ hoặc } r(A) = n.$$

2. S phụ thuộc tuyến tính $\Longleftrightarrow Ax = 0$ có vô số nghiệm hay

$$\Longleftrightarrow det(A) = 0 \text{ hoặc } r(A) < n.$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_n \end{pmatrix}$$

trong đó $A_1, \ldots, A_n$ là các chuyển vị của $a_1, \ldots, a_n$.