Định nghĩa 2.1.
Cho A là ma trận vuông cỡ $n \times n$ và M_{ij} là ma trận vuông cấp $(n-1) \times (n-1)$ có được từ cách bỏ đi dòng i và cột j trong ma trận A. Định thức của ma trận A được xác định như sau:

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11} & \text{nếu} n = 1 \\ a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} & \text{nếu } n > 1 \end{cases}$$

trong đó

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

Với ma trận $A = (a_{ij})_{n \times n}$, thì $\det(A)$ thường được viết như sau:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Cách tính định thức của ma trận cỡ $n \leq 3$

1. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

2. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Quy tắc Sarrus - Áp dụng cho định thức cấp 3

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

Ví dụ 2.1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 4 \times 2 = -9$$

Ví dụ 2.2.

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & -7 \\ 1 & 3 & 8 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{ccc|cc} 6 & 0 & -7 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 8 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 5 & -2 & 0 \end{array} \right| = 48$$

Ví dụ 2.3.

Giải phương trình sau: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Lời giải: Ta có

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{ccc:cc} 1 & 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & m & 1 \end{array} \right| = -m^3 + 3m - 2$$

Theo ycbt, ta có

$$-m^3 + 3m - 2 = 0 \iff m = -2 \vee m = 1$$

Khai triển Laplace - Áp dụng cho định thức cấp n

Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là ma trận vuông cấp n. Ta có

$$\det(A) \stackrel{d_i}{=} a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$
$$\det(A) \stackrel{c_j}{=} a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj},$$

trong đó $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$.

Ví dụ 2.4.

Cho $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Khai triển Laplace theo dòng 1, ta có

$$\begin{aligned} A &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= (-3)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Ví dụ 2.5.

Cho $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Khai triển Laplace theo dòng 2, ta có

$$\begin{aligned} A &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\ &= -4\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 34 \end{aligned}$$

Ví dụ 2.6.

Cho $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Khai triển Laplace theo cột 3, ta có

$$\begin{aligned} A &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \\ &= 4\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 34 \end{aligned}$$

Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng/ trên cột của ma trận

1. P1: Hoán vị dòng i (cột i) và dòng j (cột j): $A \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} B$ $(A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} B)$.
2. P2: Nhân dòng i (cột i) với số $\lambda \neq 0$: $A \xrightarrow{d_i \to \lambda d_i} B$ $(A \xrightarrow{c_i \to \lambda c_i} B)$.
3. P3: Nhân dòng j (cột j) với số λ rồi cộng dòng i (cột i): $A \xrightarrow{d_i \to d_i + \lambda d_j} B$ $(A \xrightarrow{c_i \to c_i + \lambda c_j} B)$.

Ví dụ 2.7.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_2 \to d_2 - 2d_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & \end{pmatrix}$$

Ví dụ 2.8.

Đưa ma trận $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ về dạng bậc thang.

Ta có

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 \longrightarrow d_2 + d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 2.9.

Đưa ma trận $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ về dạng bậc thang.

Ta có

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 \longleftrightarrow d_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 6 & -2 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{d_3 \to d_3 - 6d_1 \\ d_4 \to d_2 + 2d_2}]{d_2 \to d_2 - 2d_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 6 & 0 \\ 0 & -18 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_3 \to 5d_3 - 18d_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -108 & 30 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_4 \to 18d_4 \ + \ d_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -108 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Các phép biến đổi sơ cấp trên định thức

Cho A là ma trận vuông cỡ n và A' là ma trận tương ứng với A khi thực hiện phép biến đổi sơ cấp trên dòng (hoặc cột). Khi đó,

1. P1: Hoán vị 2 dòng/cột làm định thức đổi dấu: $\det(A) = -\det(A')$.
2. P2: Nhân một dòng/cột với một số $\lambda \neq 0$ làm định thức biến đổi gấp λ lần: $\det(A) = \dfrac{1}{\lambda}\det(A')$.
3. P3: Nhân một dòng/cột với một số λ rồi cộng vào một dòng/cột khác không làm định thức thay đổi: $\det(A) = \det(A')$.