

Định nghĩa 2.1.

Cho A là ma trận vuông cỡ $n \times n$ và M_{ij} là ma trận vuông cấp $(n-1) \times (n-1)$ có được từ cách bỏ đi dòng i và cột j trong ma trận A . Định thức của ma trận A được xác định như sau:

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11} & \text{nếu } n = 1 \\ a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} & \text{nếu } n > 1 \end{cases}$$

trong đó

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

Với ma trận $A = (a_{ij})_{n \times n}$, thì $\det(A)$ thường được viết như sau:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

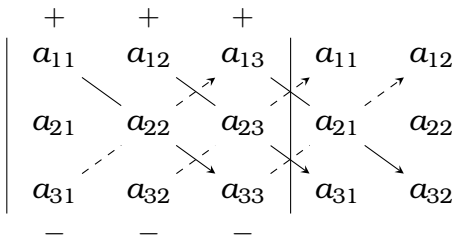


Cách tính định thức của ma trận cỡ $n \leq 3$

$$1 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$2 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Quy tắc Sarrus - Áp dụng cho định thức cấp 3



Ví dụ 2.1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 4 \times 2 = -9$$

Ví dụ 2.2.

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & -7 \\ 1 & 3 & 8 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & -7 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 8 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 5 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 48$$

The diagram shows the expansion of a 3x3 determinant into a 5x5 determinant. A vertical dashed line separates the original 3x3 matrix from its expansion. Blue arrows indicate the expansion along the first column: from 6 to 0, from 1 to 3, and from -2 to 5. Red dashed arrows indicate the expansion along the first row: from 6 to -7, from 0 to 8, and from -2 to 5. Signs are indicated above and below the elements: minus signs above 6, 0, and 5; plus signs below 6, 0, and 5.



Ví dụ 2.3.

Giải phương trình sau: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Lời giải: Ta có

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m & - & - & - \\ 1 & m & 1 & & & \\ m & 1 & 1 & + & + & + \end{vmatrix} = -m^3 + 3m - 2$$

The diagram shows the expansion of the determinant using the rule of Sarrus. A vertical dotted line separates the first three columns from the last three. Blue arrows point from the top row to the second and third columns of the second row, and from the second row to the third column of the third row. Red dashed arrows point from the top row to the second and third columns of the third row, and from the second row to the first and second columns of the third row. Signs are placed above and below the columns: minus signs above the first three columns and plus signs below the last three columns.

Theo ycbt, ta có

$$-m^3 + 3m - 2 = 0 \iff m = -2 \vee m = 1$$



Khai triển Laplace - Áp dụng cho định thức cấp n

Cho $A = (a_{ij})_{n \times n}$ là ma trận vuông cấp n . Ta có

$$\det(A) \stackrel{d_i}{=} a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

$$\det(A) \stackrel{c_j}{=} a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj},$$

trong đó $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$.

Ví dụ 2.4.

Cho $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Khai triển Laplace theo dòng 1, ta có

$$\begin{aligned} A &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= (-3) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= -3(3 \cdot 4 - 1 \cdot 2) + 2(4 \cdot 4 - 1 \cdot 0) + 4(4 \cdot 2 - 3 \cdot 0) = -3(12 - 2) + 2(16 - 0) + 4(8 - 0) = -30 + 32 + 32 = 34$$



Ví dụ 2.5.

Cho $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Khai triển Laplace theo dòng 2, ta có

$$\begin{aligned} A &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\ &= -4 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 34 \end{aligned}$$

Ví dụ 2.6.

Cho $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Khai triển Laplace theo cột 3, ta có

$$\begin{aligned} A &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \\ &= 4 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 34 \end{aligned}$$



Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng/ trên cột của ma trận

- 1 P1: Hoán vị dòng i (cột i) và dòng j (cột j): $A \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} B$
 $(A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} B)$.
- 2 P2: Nhân dòng i (cột i) với số $\lambda \neq 0$: $A \xrightarrow{d_i \rightarrow \lambda d_i} B$
 $(A \xrightarrow{c_i \rightarrow \lambda c_i} B)$.
- 3 P3: Nhân dòng j (cột j) với số λ rồi cộng dòng i (cột i):
 $A \xrightarrow{d_i \rightarrow d_i + \lambda d_j} B (A \xrightarrow{c_i \rightarrow c_i + \lambda c_j} B)$.

Ví dụ 2.7.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 \rightarrow d_2 - 2d_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



Ví dụ 2.8.

Đưa ma trận $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ về dạng bậc thang.

Ta có

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 \rightarrow d_2 + d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 2.9.

Đưa ma trận $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ về dạng bậc thang.



Ta có

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 6 & -2 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} d_2 \rightarrow d_2 - 2d_1 \\ d_3 \rightarrow d_3 - 6d_1 \\ d_4 \rightarrow d_4 + 2d_2 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 6 & 0 \\ 0 & -18 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$d_3 \rightarrow 5d_3 - 18d_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -108 & 30 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$d_4 \rightarrow 18d_4 + d_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -108 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$



Các phép biến đổi sơ cấp trên định thức

Cho A là ma trận vuông cỡ n và A' là ma trận tương ứng với A khi thực hiện phép biến đổi sơ cấp trên dòng (hoặc cột). Khi đó,

- 1 P1: Hoán vị 2 dòng/cột làm định thức đổi dấu:
 $\det(A) = -\det(A')$.
- 2 P2: Nhân một dòng/cột với một số $\lambda \neq 0$ làm định thức biến đổi gấp λ lần: $\det(A) = \frac{1}{\lambda} \det(A')$.
- 3 P3: Nhân một dòng/cột với một số λ rồi cộng vào một dòng/cột khác không làm định thức thay đổi:
 $\det(A) = \det(A')$.

