ĐẠI HỌC HUẾ
TRUNG TÂM ĐÀO TẠO TỪ XA

TS. NGUYỄN GIA ĐỊNH - *PGS.TS.* TRẦN LỘC HÙNG
TS. NGUYỄN VŨ TIẾN - *TS.* NGUYỄN VĂN TOẢN
TS. TÔN THẤT TRÍ

HƯỚNG DẪN ÔN THI TỐT NGHIỆP ĐẠI HỌC

NGÀNH GIÁO DỤC TIỂU HỌC

PHẦN TOÁN CAO CẤP

NHÀ XUẤT BẢN ĐÀ NẴNG - 2007

LỜI NÓI ĐẦU

Hiện nay các học viên của Trung tâm Đào tạo Từ xa thuộc Đại học Huế (TTĐTTX), có một số học phần về toán, đều trông chờ một hệ thống các sách bài tập với lời giải chi tiết hoặc hướng dẫn giải để có thể giúp họ hiểu bài tốt hơn và từ đó có thể giải được các đề thi theo yêu cầu của TTĐTTX. Đặc biệt là các học viên ngành giáo dục tiểu học, với số lượng ngày càng đông, đang rất cần một bộ sách như thế. Hơn thế nữa, cho đến nay vẫn chưa có tài liệu hướng dẫn ôn thi tốt nghiệp đại học ngành giáo dục tiểu học phần toán cao cấp.

Trong tình hình với yêu cầu bức thiết như thế, chúng tôi cố gắng hoàn thành tài liệu phục vụ cho việc ôn thi tốt nghiệp và các yêu cầu nói trên. Đây là tuyển tập gồm các bài tập về đại số và xác suất thống kê dành cho các học viên của TTĐTTX ngành giáo dục tiểu học ôn tập để chuẩn bị thi tốt nghiệp. Nội dung của tài liệu này được bố trí trong 7 chương, ở mỗi chương gồm hai phần : tóm tắt lí thuyết và các bài tập với lời giải chi tiết. Đó là các chương về ***quan hệ, ánh xạ, nhóm, vành-trường, biến cố ngẫu nhiên và xác suất, biến ngẫu nhiên và phân phối xác suất, thống kê toán học****. Toàn bộ nội dung đều bám sát chương trình mới của TTĐTTX và Bộ Giáo dục và Đào tạo về toán cao cấp dành cho ngành giáo dục tiểu học. Tài liệu này còn có thể dùng làm tài liệu tham khảo tốt cho các sinh viên ngành toán và giáo dục tiểu học của các trường đại học và cao đẳng.*

Các tác giả xin chân thành cảm ơn TTĐTTX và Khoa Toán-Cơ-Tin học (Trường Đại học Khoa học-Đại học Huế) về sự giúp đỡ quý báu và tạo điều kiện thuận lợi cho việc xuất bản cuốn sách này.

Các tác giả mong nhận được sự chỉ giáo của các đồng nghiệp và độc giả về những thiếu sót khó tránh khỏi của cuốn sách.

Huế, tháng 04 năm 2002

CHƯƠNG I : QUAN HỆ

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1.1. QUAN HỆ HAI NGÔI

1.1.1. Định nghĩa

Cho hai tập hợp X và Y. Một *quan hệ hai ngôi từ X đến Y* là một tập con R của tích Descartes $X \times Y$. Ta nói phần tử $x \in X$ *có quan hệ R* với phần tử $y \in Y$ nếu $(x, y) \in R$ và viết là xRy. Đặc biệt, nếu $R \subset X^2$ thì ta nói R là một quan hệ hai ngôi trên X.

1.1.2. Định nghĩa

Cho R là một quan hệ hai ngôi trên tập hợp X. Khi đó ta nói

– R có tính phản xạ nếu $\forall x \in X, xRx$;

– R có tính đối xứng nếu $\forall x, y \in X, xRy \Rightarrow yRx$;

– R có tính phản đối xứng nếu $\forall x, y \in X$, xRy và $yRx \Rightarrow x = y$;

– R có tính bắc cầu, nếu $\forall x, y, z \in X$, xRy và $yRz \Rightarrow xRz$.

1.1.3. Thí dụ

1) Quan hệ "bằng nhau" (=) trên một tập hợp X tuỳ ý có các tính chất : phản xạ, đối xứng, phản đối xứng và bắc cầu.

2) Quan hệ $\leq$ trên tập hợp $\mathbb{N}$ các số tự nhiên có các tính chất : phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu.

3) Quan hệ "bao hàm" ($\subset$) trên tập hợp $\mathcal{P}(X)$ gồm tất cả các tập con của X là một quan hệ hai ngôi có các tính chất : phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu.

4) Quan hệ đồng dạng ($\sim$) trên tập hợp các tam giác có các tính chất : phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

1.2. QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

1.2.1. Định nghĩa

Quan hệ hai ngôi R trên tập hợp X được gọi là một *quan hệ tương đương* trên X nếu R có ba tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Chẳng hạn, quan hệ bằng nhau và quan hệ đồng dạng như trong Thí dụ 1.1.3 là những quan hệ tương đương.

1.2.2. Định nghĩa

Cho R là một quan hệ tương đương trên tập hợp X và $a \in X$. Tập hợp $\{x \in X \mid xRa\}$ gọi là *lớp tương đương* của a (theo quan hệ R), kí hiệu là $\overline{a}$ hay $[a]$ hay $C(a)$.

Mỗi phần tử của một lớp tương đương gọi là một *đại biểu* của lớp tương đương đó.

1.2.3. Mệnh đề

Cho R là một quan hệ tương đương trên tập hợp X. Khi đó mọi lớp tương đều khác rỗng và hai lớp tương đương bất kì hoặc rời nhau hoặc trùng nhau.

1.2.4. Định nghĩa

Một *phân hoạch* của tập hợp X là một họ $(X_i)_{i \in I}$ gồm các tập con khác rỗng của X sao cho

$$X = \bigcup_{i \in I} X_i \,,\ X_i \cap X_j = \varnothing \ (\forall i, j \in I, i \neq j).$$

1.2.5. Mệnh đề

Mỗi quan hệ tương đương trên tập hợp X xác định một phân hoạch của X bởi các lớp tương đương.

Điều ngược lại cũng đúng. Cụ thể làm mỗi phân hoạch $(X_i)_{i \in I}$ của tập hợp X xác định một quan hệ tương đương R trên X, sao cho mỗi X_i là một lớp tương đương. Quan hệ R được xác định bởi : xRy nếu có $i \in I$ sao cho $x, y \in X_i$.

1.2.6. Định nghĩa

Cho X là một tập hợp và R là một quan hệ tương đương trên X. Tập hợp các lớp tương đương phân biệt của X đối với quan hệ R được gọi là *tập hợp thương của X theo quan hệ tương đương R*, kí hiệu là X/R.

1.2.7. Thí dụ

1) Cho tập hợp $X = \{1, 2, 3, 4\}$ và xét quan hệ hai ngôi R trên $\mathcal{P}(X)$ như sau :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(X).\ A\ R\ B \Leftrightarrow |A| = |B|.$$

(Kí hiệu $|A|$ để chỉ số phần tử của A.) Dễ dàng chứng minh được R là một quan hệ tương đương trên $\mathcal{P}(X)$. Các lớp tương đương theo quan hệ R là : $C_0 = \{\varnothing\}$ (tập con của X không có phần tử nào). $C_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$ (các tập con của X có một phần tử). $C_2 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$ (các tập con của X có hai phần tử). $C_3 = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ (các tập con của X có ba phần tử). $C_4 = \{\{1, 2, 3, 4\}\}$ (tập con của X có bốn phần tử). Tập hợp thương của $\mathcal{P}(X)$ theo quan hệ R là $\mathcal{P}(X)/R = \{C_0, C_1, C_2, C_3, C_4\}$.

2) Cho n là một số nguyên lớn hơn 1 và xét quan hệ hai ngôi sau trên tập $\mathbb{Z}$ các số nguyên và gọi là quan hệ đồng dư môđulô n :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, x \equiv y \pmod{n} \Leftrightarrow x - y \text{ là bội số của } n.$$

Dễ dàng chứng minh được $\equiv \pmod{n}$ là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{Z}$. Với mỗi $x \in \mathbb{Z}$, tồn tại duy nhất hai số nguyên q và r sao cho $x = qn + r$ với $0 \leq r < n$ và khi đó $x \equiv r \pmod{n}$. Do đó các lớp tương đương theo quan hệ này là $\overline{0} = \{qn \mid q \in \mathbb{Z}\}$, $\overline{1} = \{qn + 1 \mid q \in \mathbb{Z}\}, \ldots, \overline{n-1} = \{qn + n - 1 \mid q \in \mathbb{Z}\}$. Tập hợp thương của $\mathbb{Z}$ theo quan hệ đồng dư môđulô n là $\{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ và thường kí hiệu là $\mathbb{Z}_n$, mỗi phần tử của $\mathbb{Z}_n$ gọi là một số nguyên môđulô n.

1.3. QUAN HỆ THỨ TỰ

1.3.1. Định nghĩa

Quan hệ hai ngôi $\leq$ trên tập hợp X được gọi là một *quan hệ thứ tự* trên X nếu nó có các tính chất phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu.

Tập hợp X được trang bị một quan hệ thứ tự $\leq$ được gọi là một *tập được sắp thứ tự*. Nếu $x \leq y$, ta nói x đứng trước y. Nếu $x \leq y$ và $x \neq y$ thì ta viết $x < y$. Tập con $Y \subset X$ được gọi là *được sắp thứ tự toàn phần* (hay được sắp thứ tự tuyến tính) nếu với mọi $x, y \in Y$, ta có $x \leq y$ hoặc $y \leq x$. Trong trường hợp ngược lại ta nói Y được sắp thứ tự bộ phận.

1.3.2. Thí dụ

1) Quan hệ $\leq$ thông thường trên các tập hợp số $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ là quan hệ thứ tự toàn phần.

2) Trên tập hợp $\mathbb{N}$ các số tự nhiên, xét quan hệ hai ngôi chia hết ("|") như sau :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, x \neq 0, x \mid y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, y = kx.$$

Quan hệ này có hai tính chất : phản đối xứng và bắc cầu, nhưng không có tính chất phản xạ (ta không có 0|0). Vì vậy, quan hệ chia hết không phải là quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}$. Tuy nhiên, quan hệ chia hết lại là một quan hệ thứ tự trên tập $\mathbb{N}^*$ các số tự nhiên khác không. Ở đây quan hệ chia hết sắp thứ tự bộ phận tập $\mathbb{N}^*$.

3) Quan hệ bao hàm ("$\subset$") sắp thứ tự bộ phận tập $\mathcal{P}(X)$ gồm các tập con của X.

4) Cho X là tập hợp được sắp thứ tự toàn phần bởi quan hệ $\leq$. Trên X^n, ta định nghĩa quan hệ hai ngôi $\mathcal{D}$ như sau :

$$\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in X^n.$$

$$x\mathcal{D}y \Leftrightarrow x = y \text{ hoặc } \exists i, x_1 = y_1, ..., x_{i-1} = y_{i-1}, x_i < y_i.$$

Khi đó X^n được sắp thứ tự toàn phần bởi quan hệ $\mathcal{D}$. Quan hệ này được gọi là quan hệ *thứ tự từ điển*.

1.3.3. Định nghĩa

Cho X là tập hợp được sắp thứ tự bởi quan hệ thứ tự $\leq$ và $A \subset X$. Ta nói :

Phần tử $a \in X$ là *phần tử tối đại* của X nếu

$$\forall x \in X, a \leq x \Rightarrow x = a \; ;$$

Phần tử $b \in X$ là *phần tử tối tiểu* của X nếu

$$\forall x \in X, x \leq b \Rightarrow x = b \; ;$$

Phần tử $m \in X$ là *phần tử lớn nhất* của X nếu

$$\forall x \in X, x \leq m \; ;$$

Phần tử $n \in X$ là *phần tử nhỏ nhất* của X nếu

$$\forall x \in X, n \leq x \; ;$$

Phần tử $c \in X$ là *phần tử chặn trên* của A nếu

$$\forall x \in A, x \leq c \; ;$$

Phần tử $d \in X$ là *phần tử chặn dưới* của A nếu

$$\forall x \in A, d \leq x \; ;$$

Phần tử nhỏ nhất của tập hợp tất cả các phần tử chặn trên của A là *cận trên* của A trong X, kí hiệu là $\sup\limits_{X} A$;

Phần tử lớn nhất của tập hợp tất cả các phần tử chặn dưới của A là *cận dưới* của A trong X, kí hiệu là $\inf\limits_{N} A$.

1.3.4. Chú ý

Phần tử lớn nhất hay nhỏ nhất (nếu có) là duy nhất.

Nếu có phần tử lớn nhất thì đó cũng là phần tử tối đại duy nhất. Tương tự, nếu có phần tử nhỏ nhất thì đó cũng là phần tử tối tiểu duy nhất.

Cận trên của A thuộc A khi và chỉ khi nó là phần tử lớn nhất của A. Tương tự, cận dưới của A thuộc A khi và chỉ khi nó là phần tử nhỏ nhất của A.

1.3.5. Định nghĩa

Cho tập hợp X được sắp thứ tự bởi quan hệ $\leq$. Ta nói X được sắp *thứ tự* tốt bởi quan hệ này nếu mọi tập con khác rỗng của X đều có phần tử nhỏ nhất.

1.3.6. Thí dụ

1) Xét tập được sắp thứ tự $\mathbb{N}^*$ bởi quan hệ chia hết ("|") và $A = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Tập A không có phần tử lớn nhất, nhưng có phần tử nhỏ nhất và cũng là phần tử tối tiểu duy nhất là 1, các phần tử tối đại là 7, 8, 9, 10, 11, 12. Cận trên của A trong $\mathbb{N}^*$ là BCNN (1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12) và cận dưới của A trong $\mathbb{N}^*$ là 1.

2) Xét tập được sắp thứ tự $\mathcal{P}(X)$ bởi quan hệ bao hàm ("$\subset$"), trong đó X là một tập khác rỗng. Phần tử lớn nhất và nhỏ nhất của $\mathcal{P}(X)$ lần lượt là X và $\varnothing$. Các phần tử tối tiểu của $\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ là các tập $\{a\}$ với $a \in X$. Các phần tử tối đại của $\mathcal{P}(X) \setminus \{X\}$ là các tập $X \setminus \{a\}$ với $a \in X$. Cận trên và cận dưới của $A = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ trong $\mathcal{P}(X)$ lần lượt là $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ và $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$.

3) Tập hợp sắp thứ tự $(\mathbb{N}, \leq)$ là một tập sắp thứ tự tốt. Các tập hợp sắp thứ tự $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$ không phải là các tập sắp thứ tự tốt. Tập sắp thứ tự $(\mathbb{N}^*, |)$ không phải là các tập sắp thứ tự tốt vì tập con $A = \{2, 3, 5\}$ không có phần tử nhỏ nhất.

BÀI TẬP VÀ LỜI GIẢI

1. Xác định xem quan hệ R trên tập $\mathbb{Z}$ các số nguyên có tính phản xạ, đối xứng, phản đối xứng, bắc cầu không ? Với xRy nếu và chỉ nếu :

a) $x \neq y$;

b) $xy \geq 1$;

c) $x = y + 1$ hay $x = y - 1$;

d) x là bội số của y ;

e) x và y cùng âm hoặc cùng không âm ;

f) $x = y^2$;

g) $x \geq y^2$.

Giải

a) R chỉ có tính đối xứng.

b) R có tính đối xứng và bắc cầu.

c) R chỉ có tính đối xứng.

d) R có tính phản xạ và bắc cầu.

e) R có tính phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

f) R chỉ có tính phản đối xứng.

g) R có tính phản đối xứng và bắc cầu.

2. Cho tập hợp $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \subset \mathbb{Z}$. Hãy liệt kê tất cả các phần tử của quan hệ R sau trên X và xét xem quan hệ R có các tính chất nào ?

a) $\forall x, y \in X, xRy \Leftrightarrow x + y$ là số chẵn.

b) $\forall x, y \in X, x \neq 0, xRy \Leftrightarrow x \mid y$.

Giải

a) $R = \{(0, 0), (0, 2), (0, 4), (1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 0), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 0), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$. Dễ dàng chứng minh được R có các tính chất : phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

b) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), (5, 0)\}$. Dễ dàng có được R có các tính chất : phản đối xứng và bắc cầu.

3. Một quan hệ R trên tập X được gọi là quan hệ vòng quanh nếu xRy và yRz kéo theo zRx. Chứng minh rằng quan hệ R là phản xạ và vòng quanh nếu và chỉ nếu R là một quan hệ tương đương.

Giải

($\Rightarrow$) Ta đã có R là phản xạ. $\forall x, y \in X$, $xRy \Rightarrow xRy \wedge yRy \Rightarrow yRx$ (do tính vòng quanh), tức là R có tính đối xứng. $\forall x, y, z \in X$, $xRy \wedge yRz \Rightarrow zRx \Rightarrow xRz$, tức là R có tính bắc cầu. Vậy R là một quan hệ tương đương.

($\Leftarrow$) R là một quan hệ tương đương nên R có tính phản xạ. $\forall x, y, z \in X$, $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz \Rightarrow zRx$, tức là R có tính vòng quanh.

4. Cho L_0 là một đường thẳng cho trước trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$. Một quan hệ R trên tập $\mathcal{L}$ tất cả các đường thẳng trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ được xác định như sau :

$$\forall L_1, L_2 \in \mathcal{L}, L_1 \, R \, L_2 \Leftrightarrow L_1 \cap L_0 \neq \varnothing \text{ và } L_2 \cap L_0 \neq \varnothing.$$

Xác định xem R có là một quan hệ tương đương hay không ?

Giải

R có tính đối xứng và bắc cầu, nhưng R không có tính phản xạ. Do đó R không là một quan hệ tương đương. Tuy nhiên, nếu $\mathcal{L}$ là tập các đường thẳng trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ cắt L_0 thì R là một quan hệ tương đương trên $\mathcal{L}$.

5. Cho M là một tập hợp khác rỗng và $a \in M$. Trên $X = \mathcal{P}(M)$, ta định nghĩa quan hệ hai ngôi như sau :

$$R = \{(A, B) \in X^2 \mid A = B \text{ hay } a \in A \cap B\}.$$

Chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương trên X. Hãy chỉ ra tập hợp thương.

Giải

Từ $A = A$, ta có $(A, A) \in R$ hay R có tính phản xạ.

$\forall A, B \in X$, $(A, B) \in R \Rightarrow A = B \vee a \in A \cap B \Rightarrow B = A \vee a \in B \cap A \Rightarrow (B, A) \in R$, tức là R có tính đối xứng.

$\forall A, B, C \in X, (A, B) \in R \wedge (B, C) \in R \Rightarrow (A = B \vee a \in A \cap B) \wedge (B = C \vee a \in B \cap C) \Rightarrow (A = B \wedge B = C) \vee (A = B \wedge a \in B \cap C) \vee (a \in A \cap B \wedge B = C) \vee (a \in A \cap B \wedge a \in B \cap C) \Rightarrow A = C \vee a \in A \cap C \Rightarrow (A, C) \in R$, tức là R có tính bắc cầu. Vậy R là một quan hệ tương đương.

Với mỗi $A \in X$, nếu $a \notin A$ thì $(A, B) \in R \Leftrightarrow A = B$ nghĩa là lớp tương đương $\overline{A} = \{A\}$ và nếu a $\in A$ thì $(A, B) \in R \Leftrightarrow a \in B$ nghĩa là lớp tương đương $\overline{A} = \{B \in X \mid a \in B\}$. Do đó tập thương của X theo R là

$$X / R = \{\{A\} \mid A \subset M, a \notin A\} \cup \{\{A \in X \mid a \in A\}\}.$$

6. Gọi X là tập hợp mọi hàm thực biến số thực. Chứng tỏ quan hệ R sau là quan hệ tương đương trên X:

a) $\forall x, y \in X, xRy \Leftrightarrow \exists C > 0, x(t) = y(t), \forall t \in \mathbb{R}, |t| < C$.

b) $\forall x, y \in X, xRy \Leftrightarrow \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{x(t) - y(t)}{t^n} = 0$, trong đó $n \in \mathbb{N}$ cho trước.

Giải

a) $\forall x \in X, x(t) = x(t), \forall t \in \mathbb{R}$, nghĩa là R có tính phản xạ, $\forall x, y \in X$, $xRy \Leftrightarrow \exists C > 0, x(t) = y(t), \forall t \in \mathbb{R}. |t| < C \Rightarrow \exists C > 0, y(t) = x(t), \forall t \in \mathbb{R}$, $|t| < C \Rightarrow yRx$, nghĩa là R có tính đối xứng.

$\forall x, y, z \in X, xRy \wedge yRz \Rightarrow \exists C_1, C_2 > 0, (x(t) = y(t), \forall t \in \mathbb{R}, |t| < C_1) \wedge (y(t) = z(t). \forall t \in \mathbb{R}, |t| < C_2) \Rightarrow \exists C = \min(C_1, C_2), x(t) = z(t), \forall t \in \mathbb{R}$, $|t| < C$, nghĩa là R có tính bắc cầu. Vậy R là quan hệ tương đương.

b) $\forall x \in X, \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{x(t) - x(t)}{t^n} = 0$ hay xRx, nghĩa là R có tính phản xạ. $\forall x, y \in X, xRy \Rightarrow \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{x(t) - y(t)}{t^n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{y(t) - x(t)}{t^n} = 0 \Rightarrow yRx$, nghĩa là R có tính đối xứng. $\forall x, y, z \in X, xRy \wedge yRz \Rightarrow \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{x(t) - y(t)}{t^n} = 0 \wedge$

$$\lim_{t\to 0}\frac{y(t)-z(t)}{t^n}=0 \Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{x(t)-z(t)}{t^n}=\lim_{t\to 0}\frac{x(t)-y(t)}{t^n}+\lim_{t\to 0}\frac{y(t)-z(t)}{t^n}=0$$

$\Rightarrow xRz$, nghĩa là R có tính bắc cầu. Vậy R là quan hệ tương đương.

7. Xét quan hệ hai ngôi R trên $\mathbb{N}^2$ như sau :

$\forall(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \mathbb{N}^2, (m_1, n_1)\, R\, (m_2, n_2) \Leftrightarrow m_1 + n_2 = m_2 + n_1$. Chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{N}^2$. Hãy chỉ ra tập hợp thương.

Giải

Rõ ràng R có tính phản xạ. $\forall(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \mathbb{N}^2, (m_1, n_1)\, R\, (m_2, n_2)$ $\Rightarrow m_1 + n_2 = m_2 + n_1 \Rightarrow m_2 + n_1 = m_1 + n_2 \Rightarrow (m_2, n_2)\, R\, (m_1, n_1)$, nghĩa là R có tính đối xứng.

$\forall(m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_3) \in \mathbb{N}^2, (m_1, n_1)\, \mathrm{R}\, (m_2, n_2) \wedge (m_2, n_2)\, \mathrm{R}\, (m_3, n_3)$ $\Rightarrow m_1 + n_2 = m_2 + n_1 \wedge m_2 + n_3 = m_3 + n_2 \Rightarrow m_1 + n_2 + m_2 + n_3 = m_2 + n_1 + m_3 + n_2 \Rightarrow m_1 + n_3 = m_3 + n_1 \Rightarrow (m_1, n_1)\, \mathrm{R}\, (m_3, n_3)$, nghĩa là R có tính bắc cầu. Vậy R là một quan hệ tương đương.

$\forall(m, n) \in \mathbb{N}^2$, lớp tương đương

$$\overline{(m,n)} = \{(m', n') \in \mathbb{N}^2 \mid m' - n' = m - n\}.$$

Tập hợp thương là $\mathbb{N}^2 / R = \{\overline{(m,n)} \mid (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$ và chính là tập $\mathbb{Z}$ các số nguyên.

8. Trên $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, xét quan hệ hai ngôi sau :

$\forall(z_1, n_1), (z_2, n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, (z_1, n_1)\, R\, (z_2, n_2) \Leftrightarrow z_1 n_2 = z_2 n_1$.

Chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Hãy chỉ ra tập hợp thương.

Giải

Rõ ràng R có tính phản xạ. $\forall(z_1, n_1), (z_2, n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, (z_1, n_1)\ R\ (z_2, n_2)$.

$\Rightarrow z_1n_2 = z_2n_1 \Rightarrow z_2n_1 = z_1n_2 \Rightarrow (z_2, n_2)\ R\ (z_1, n_1)$, nghĩa là R có tính đối xứng.

$\forall(z_1, n_1), (z_2, n_2), (z_3, n_3) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, (z_1, n_1)\ R\ (z_2, n_2) \wedge (z_2, n_2)$ $R\ (z_3, n_3) \Rightarrow z_1n_2 = z_2n_1 \wedge z_2n_3 = z_3n_2 \Rightarrow z_1n_2z_2n_3 = z_2n_1z_3n_2 \Rightarrow z_1z_2n_3 = z_2z_3n_1$; nếu $z_2 \neq 0$ thì $z_1n_3 = z_3n_1$, nếu $z_2 = 0$ thì $z_1n_2 = 0$ ($\Rightarrow z_1 = 0$) và $z_3n_2 = 0$ ($\Rightarrow z_3 = 0$) nên $z_1n_3 = z_3n_1 = 0$ hay $(z_1, n_1)\ R\ (z_3, n_3)$, nghĩa là R có tính bắc cầu. Vậy R là một quan hệ tương đương.

$\forall(z, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, lớp tương đương

$$\overline{(z, n)} = \{(z', n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \mid \frac{z'}{n'} = \frac{z}{n}\}.$$

Tập hợp thương là $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*) / R = \{\overline{(z, n)} \mid (z, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\}$ và chính là tập $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ.

9. Trong mặt phẳng có hệ toạ độ vuông góc, hai điểm $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ được gọi là quan hệ với nhau bởi R nếu và chỉ nếu $x_1y_1 = x_2y_2$. Chứng tỏ rằng R là một quan hệ tương đương và tìm các lớp tương đương. Bây giờ nếu định nghĩa

$$P_1\ S\ P_2 \Leftrightarrow x_1y_1 = x_2y_2 \text{ và } x_1x_2 \geq 0$$

thì S còn là một quan hệ tương đương nữa không ?

Giải

Dễ dàng chứng minh được R có tính phản xạ, đối xứng và bắc cầu, nghĩa là R là một quan hệ tương đương. Với điểm $P(a, b)$ trong mặt phẳng, lớp tương đương $\overline{P(a, b)} = \{P'(x, y) \mid xy = c\}$ (với $c = ab$). Nếu $c = 0$ thì $\overline{P(a, b)}$ chính là hai trục tọa độ $x = 0$ và $y = 0$. Nếu $c \neq 0$ thì $\overline{P(a, b)}$ chính là hyperbol có phương trình $xy = c$. Tập hợp thương là tập

$$\{\{P(x, y) \mid xy = c\} \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

S không là một quan hệ tương đương vì nó không có tính bắc cầu $((1, 0)\, S\, (0, 1)$, $(0, 1)\, S\, (-1, 0)$ nhưng không có $(1, 0)\, S\, (-1, 0))$.

10. Trên tập hợp $\mathbb{R}$ các số thực, xét quan hệ hai ngôi $\mathbb{R}$ sau :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, xRy \Leftrightarrow x^3 - y^3 = x - y.$$

Chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương. Tìm các lớp tương đương và tìm tập hợp thương.

Giải

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x^3 - x^3 = x - x = 0$, tức là xRx hay R có tính phản xạ ; $x^3 - y^3 = x - y \Rightarrow y^3 - x^3 = y - x$ tức là $xRy \Rightarrow yRx$ hay R có tính đối xứng ; $x^3 - y^3 = x - y$ và $y^3 - z^3 = y - z \Rightarrow x^3 - z^3 = (x^3 - y^3) + (y^3 - z^3) = (x - y) + (y - z) = x - z$, tức là xRy và $yRz \Rightarrow xRz$ hay R có tính bắc cầu. Vậy R là một quan hệ tương đương.

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \overline{a} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - a^3 = x - a\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid (x - a)(x^2 + ax + a^2 - 1) = 0\}.$$

Nếu $a < -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ hay $a > \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ thì $\overline{a} = \{a\}$;

Nếu $a = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ hay $a = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ thì $\overline{a} = \{-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\}$;

Nếu $a = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ hay $a = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ thì $\overline{a} = \{\dfrac{2}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\}$;

Nếu $-\dfrac{2}{\sqrt{3}} < a < \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ và $a \neq \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ thì

$$\overline{a} = \{a, \frac{-a - \sqrt{4 - 3a^2}}{2}, \frac{-a + \sqrt{4 - 3a^2}}{2}\}.$$

11. Cho f là một đơn ánh từ tập X vào tập $\mathbb{N}$ các số tự nhiên. Chứng minh rằng quan hệ R được xác định bởi :

$$\forall x, y \in X, xRy \Leftrightarrow f(x) \le f(y)$$

là một quan hệ thứ tự toàn phần trên X.

Giải

$\forall x, y, z \in X, f(x) \le f(x)$ hay R có tính phản xạ, nếu $f(x) \le f(y)$ và $f(y) \le f(z)$ thì $f(x) \le f(z)$ hay R có tính bắc cầu. Ngoài ra, nếu $f(x) \le f(y)$ và $f(y) \le f(x)$ thì $f(x) = f(y)$ và do f là đơn ánh nên $x = y$ hay R có tính phản đối xứng. $\forall x, y \in X$, ta luôn có $f(x) \le f(y)$ hoặc $f(y) \le f(x)$ hay xRy hoặc yRx. Vì vậy, R là một quan hệ thứ tự toàn phần trên X.

12. Cho tập hợp $X = \{2, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12\}$. Hãy xác định phần tử tối đại, tối tiểu, lớn nhất và nhỏ nhất của tập hợp X với quan hệ thứ tự chia hết "|" và của tập hợp $\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ với quan hệ thứ tự bao hàm "$\subset$".

Giải

Đối với quan hệ thứ tự chia hết "|" trên X, các phần tử tối đại là 7, 8, 10, 11, 12, các phần tử tối tiểu là 2, 7, 11, không có phần tử lớn nhất cũng như nhỏ nhất.

Đối với quan hệ bao hàm "$\subset$" trên $\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$. Phần tử tối đại duy nhất cũng như phần tử lớn nhất là X, các phần tử tối tiểu là các tập con có một phần tử của X, không có phần tử nhỏ nhất.

13. Xét quan hệ chia hết trên tập hợp $\mathbb{N}^*$ và các tập con $A = \{4, 8, 12\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$.

a) Tìm các phần tử lớn nhất, nhỏ nhất của A và B.

b) Tìm các phần tử tối đại, tối tiểu của A và B.

c) Tìm các phần tử cận trên, cận dưới của A và B.

Giải

a) A không có phần tử lớn nhất và có phần tử nhỏ nhất là 4. B không có phần tử lớn nhất hoặc nhỏ nhất.

b) A có các phần tối đại là 8, 12 và tối tiểu duy nhất là 4. B có các phần tử tối đại là 3, 4, 5 và có các phần tử tối tiểu là 2, 3, 5.

c) A và B lần lượt có cận trên là BCNN(4, 8, 12) = 24 và BCNN (2, 3, 4, 5) = 60, A và B lần lượt có cận dưới là UCLN(4, 8, 12) = 4 và UCLN(2, 3, 4, 5) = 1.

14. Tập A được gọi là sắp thứ tự đầy đủ bởi quan hệ thứ tự $\leq$ nếu mọi tập con khác rỗng của A bị chặn trên đều có cận trên.

a) Chứng minh rằng sắp thứ tự tốt là sắp thứ tự đầy đủ.

b) Chứng tỏ rằng $\mathbb{N}$ và $\mathbb{R}$ sắp thứ tự đầy đủ bởi quan hệ $\leq$ thông thường, nhưng $\mathbb{Q}$ sắp thứ tự không đầy đủ bởi $\leq$.

Giải

a) Giả sử A được sắp thứ tự tốt bởi $\leq$ và B là một tập con tuỳ ý khác rỗng của A có chặn trên. Khi đó tập C gồm các chặn trên của B là tập con khác rỗng của A. Vì vậy, C có phần tử nhỏ nhất c và c chính là cận trên của B. Do đó A được sắp thứ tự đầy đủ bởi $\leq$.

b) $\mathbb{N}$ là tập được sắp thứ tự tốt bởi quan hệ $\leq$ thông thường, nên theo Câu a) $\mathbb{N}$ được sắp thứ tự đầy đủ bởi quan hệ này.

Theo nguyên lí về cận của tập các số thực $\mathbb{R}$, mọi tập con khác rỗng của $\mathbb{R}$ bị chặn trên thì có cận trên. Do đó $\mathbb{R}$ được sắp thứ tự đầy đủ bởi quan hệ $\leq$.

Xét tập $B = \{q \in \mathbb{Q} \mid 0 < q < \sqrt{2}\}$ thì $B \neq \varnothing$ và có chặn trên trong $\mathbb{Q}$. Nếu B có cận trên là c thì sẽ dẫn đến vô lí vì giữa $\sqrt{2}$ và c có vô số số hữu tỉ (tính chất trù mật của $\mathbb{Q}$ trong $\mathbb{R}$).

15. Cho X là một tập khác rỗng và M là tập các ánh xạ từ X vào tập $\{0, 1\}$. Trên M, xét quan hệ R như sau :

$$\forall f, g \in M, fRg \Leftrightarrow \forall x \in X, f(x)g(x) = f(x).$$

Chứng minh rằng R là một quan hệ thứ tự. M có được sắp thứ tự toàn phần bởi R hay không ? Hãy xác định các phần tử tối đại và tối tiểu của M.

Giải

$$\forall f, g, h \in M, \forall x \in X.$$

$f(x)\,f(x) = f(x)$ hay fRf. Do đó R có tính phản xạ ;

Nếu fRg và gRf tức là $f(x)\,g(x) = f(x)$ và $g(x)\,f(x) = g(x)$ thì $f(x) = g(x)$ hay $f = g$, do đó R có tính phản đối xứng ;

Nếu fRg và gRh tức là $f(x)\,g(x) = f(x)$ và $g(x)\,h(x) = g(x)$ thì $f(x)\,g(x)\,h(x) = f(x)$; khi đó, nếu $g(x) = 0$ thì $f(x)\,h(x) = f(x) = 0$ và nếu $g(x) = 1$ thì $f(x)\,h(x) = f(x)$; nghĩa là, ta có fRh, do đó R có tính bắc cầu.

Vì vậy, R là một quan hệ thứ tự trên M. Nếu X chỉ có 1 phần tử x thì $\forall f, g \in M$, ta luôn có $f(x)\,g(x) = f(x)$ hoặc $g(x)\,f(x) = g(x)$, tức là fRg hay gRf, do đó R là quan hệ thứ tự toàn phần. Nếu X có hơn 1 phần tử thì với $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$. chọn $f, g \in M$ thỏa mãn $f(x_1) = 1$, $g(x_1) = 0$ và $f(x_2) = 0$, $g(x_2) = 1$. Ta có $(f, g) \notin R$ và $(g, f) \notin R$. Do đó R có quan hệ thứ tự không toàn phần.

Chọn $a \in M$ thoả mãn $a(x) = 1, \forall x \in X$ thì $\forall f \in M$, ta có $f(x)\,a(x) = f(x)$ hay fRa, do đó a là phần tử tối đại duy nhất cũng là phần tử lớn nhất của M. Chọn $b \in M$ thỏa mãn $b(x) = 0, \forall x \in X$ thì $\forall f \in M$, ta có $b(x)\,f(x) = b(x)$ hay bRf, do đó b là phần tử tối tiểu duy nhất cũng là phần tử nhỏ nhất của M.

CHƯƠNG II : ÁNH XẠ

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

2.1. KHÁI NIỆM VÀ CÁC TÍNH CHẤT

2.1.1. Định nghĩa

Cho hai tập hợp A và B. Một *ánh xạ* f từ A vào B là một sự ghép đôi mỗi phần tử $a \in A$ với một phần tử duy nhất của B, kí hiệu là $f(a)$. Phần tử $f(a) \in B$ được gọi là giá trị của f tại a. A được gọi là *tập nguồn* hay *miền xác định* và B gọi là *tập đích* hay *miền giá trị*. Một ánh xạ f từ A vào B còn được gọi là một hàm từ A và B và được kí hiệu bởi $f : A \to B$ hay $A \xrightarrow{f} B$ hay $f : a \in A \mapsto f(a) \in B$.

Vậy một ánh xạ hoàn toàn được xác định bởi tập nguồn, tập đích và giá trị tại mọi phần tử của tập nguồn. Vì lí do đó, đẳng thức $f = g$ giữa hai ánh xạ xảy ra khi và chỉ khi f và g có cùng tập nguồn, cùng tập đích và $f(a) = g(a)$ với mọi a thuộc tập nguồn.

Cho ánh xạ $f : A \to B$. Tập hợp $\{(a, f(a)) \mid a \in A\}$ gọi là *đồ thị* của ánh xạ f, kí hiệu G_f.

2.1.2. Thí dụ

1) Cho A là một tập hợp và B là một tập con của A. Phép tương ứng $f : A \to A$ cho bởi $f(a) = a$ là một ánh xạ, gọi là *ánh xạ đồng nhất*, kí hiệu id_A hay 1_A ; $g : B \to A$ cho bởi $g(a) = a$ cũng là một ánh xạ, gọi là *phép nhập* hay *phép bao hàm*, kí hiệu i_A^B.

2) Cho ánh xạ $f : A \to B$, X là một tập con của A và Y là một tập chứa A. Khi đó ta có ánh xạ $g : X \to B$ cho bởi $g(x) = f(x)$ với mọi $x \in X$. Ánh xạ g gọi là thu hẹp của f lên X, kí hiệu $g = f\,|_X$. Ngoài ra, nếu có ánh xạ $h : Y \to B$ sao cho $h\,|_A = f$ thì h gọi là một *mở rộng* của f.

3) Các hàm số $y = \sqrt{1 + x^2}$, $y = \sqrt{x}$, $y = \dfrac{1}{1 + x}$ xác định lần lượt các ánh xạ sau :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+,\ h : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}.$$

trong đó $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ và $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

4) Cho các ánh xạ $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = |x|$ (trị tuyệt đối của x), $g(x) = [x]$ (phần nguyên của x), $h(x) = x - [x]$ (phần lẻ của x), trong đó phần nguyên của x là số nguyên $[x]$ thoả mãn $[x] \leq x < [x] + 1$. Khi đó, $f|_{\mathbb{R}_0^+} = id_{\mathbb{R}_0^+}$, $g|_{\mathbb{Z}} = id_{\mathbb{Z}}$, $h|_{\mathbb{Z}} = 0$.

2.1.3. Định nghĩa

Cho $f : A \to B$ là một ánh xạ, $x \in A$, X là một tập con của A và Y là một tập con của B. Khi đó ta nói

- $f(x)$ là ảnh của x bởi f,
- $f(X) = \{f(a) \in B \mid a \in X\}$ là *ảnh của X tạo bởi f.*
- $f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$ là *tạo ảnh của Y bởi f.*

Đặc biệt, với $b \in B$, $f^{-1}(\{b\}) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$ và viết đơn giản là $f^{-1}(b)$. Mỗi $a \in f^{-1}(b)$ gọi là một tạo ảnh của b bởi f. Khi $X = A$ ta gọi $f(X)$ là *ảnh của f* và kí hiệu là Imf. Khi $X = \varnothing$, ta có $f(\varnothing) = \varnothing$.

2.1.4. Tính chất

Cho ánh xạ $f : A \to B$, X và Y là các tập con của A, S và T là các tập con của B. Khi đó ta có :

1) $X \subset f^{-1}(f(X))$.

2) $f(f^{-1}(S)) \subset S$.

3) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.

4) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$.

5) $f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$.

6) $f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$.

7) $f(A \setminus X) \supset f(A) \setminus f(X)$

8) $f^{-1}(B \setminus S) = A \setminus f^{-1}(S)$.

2.2. ĐƠN ÁNH – TOÀN ÁNH – SONG ÁNH

2.2.1. Định nghĩa

Ánh xạ $f : A \to B$ gọi là một *đơn ánh* nếu với mọi $a, a' \in A$, $a \neq a'$ kéo theo $f(a) \neq f(a')$ hay $f(a) = f(a')$ kéo theo $a = a'$. Người ta còn gọi đơn ánh là ánh xạ *một đối một.*

2.2.2. Định nghĩa

Ánh xạ $f : A \to B$ gọi là một *toàn ánh* nếu với mọi $b \in B$ tồn tại $a \in A$ sao cho $b = f(a)$ hay $f(A) = B$. Người ta còn gọi toàn ánh f là ánh xạ từ A lên B.

2.2.3. Định nghĩa

Ánh xạ $f : A \to B$ gọi là một *song ánh* nếu f vừa đơn ánh vừa toàn ánh, nghĩa là với mỗi $b \in B$ tồn tại duy nhất $a \in A$ sao cho $b = f(a)$.

2.2.4. Thí dụ

1) Cho A là một tập hợp và B là một tập con của A. Khi đó ánh xạ đồng nhất id_A của A là một song ánh, phép bao hàm i_A^B là một đơn ánh.

2) Ánh xạ $n \in \mathbb{Z} \mapsto -n \in \mathbb{Z}$ là một song ánh. Ánh xạ $n \in \mathbb{Z} \mapsto 2n \in \mathbb{Z}$ là một đơn ánh nhưng không phải là toàn ánh. Ánh xạ $n \in \mathbb{Z} \mapsto n^2 \in \mathbb{Z}$ không phải là đơn ánh cũng không phải là toàn ánh.

3) Ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $x \mapsto x^3$ là một song ánh, nhưng ánh xạ $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $x \mapsto x^3$ là một đơn ánh và không phải là toàn ánh.