ĐẠI HỌC HUẾ
TRUNG TÂM ĐÀO TẠO TỪ XA

NGUYỄN GIA ĐỊNH
NGUYỄN TRỌNG CHIẾN – NGUYỄN THỊ KIM THOA

HƯỚNG DẪN ÔN THI TỐT NGHIỆP ĐẠI HỌC

NGÀNH GIÁO DỤC TIỂU HỌC

TOÁN CAO CẤP VÀ PHƯƠNG PHÁP DẠY HỌC MÔN TOÁN Ở TIỂU HỌC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC HUẾ
Huế, 2013

LỜI NÓI ĐẦU

Để đáp ứng yêu cầu nâng cao chất lượng đào tạo, Trung tâm Đào tạo từ xa – Đại học Huế đã tổ chức biên soạn các tài liệu hướng dẫn ôn thi tốt nghiệp cho tất cả các ngành đào tạo của trung tâm. Cuốn sách *Hướng dẫn ôn thi tốt nghiệp đại học ngành Giáo dục Tiểu học (phần Toán cao cấp và Phương pháp dạy học môn Toán ở tiểu học)* là một trong số các tài liệu đó.

Cuốn tài liệu được biên soạn trên cơ sở đề cương ôn thi tốt nghiệp dành cho sinh viên ngành Giáo dục Tiểu học đã được Trung tâm Đào tạo từ xa – Đại học Huế ban hành. Tài liệu bao gồm hai phần:

Phần I: Toán cao cấp

Phần II: Phương pháp dạy học môn Toán ở tiểu học

Mỗi phần đều được trình bày theo hai mục: Tóm tắt lí thuyết (theo yêu cầu của đề cương ôn tập) và câu hỏi, bài tập kèm theo hướng dẫn cách giải nhằm giúp sinh viên có thể chủ động tự ôn tập theo tài liệu hướng dẫn này.

Mục Tóm tắt lí thuyết trình bày những kiến thức và kĩ năng cơ bản mà sinh viên cần ghi nhớ để vận dụng vào giải các bài tập. Sinh viên được phép sử dụng các kiến thức và kĩ năng cơ bản này để làm bài tập và bài thi tốt nghiệp mà không cần phải chứng minh lại. Mục Bài tập trình bày các dạng toán cơ bản mà sinh viên cần biết cách giải. Đây là các bài tập để sinh viên luyện tập và làm cơ sở để giảng viên tham khảo khi xây dựng đề thi.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng, nhưng tài liệu này chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót nhất định. Ban Giám đốc Trung tâm Đào tạo từ xa – Đại học Huế và các tác giả rất mong nhận được những ý kiến đóng góp chân thành của bạn đọc, đặc biệt là đội ngũ giảng viên, sinh viên của Trung tâm để tiếp tục hoàn thiện tài liệu này.

Trân trọng cảm ơn.

Các tác giả

Phần I

TOÁN CAO CẤP

Chương 1

QUAN HỆ

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1.1 QUAN HỆ HAI NGÔI

1.1.1. Định nghĩa

Cho hai tập hợp X và Y. Một *quan hệ hai ngôi từ X đến Y* là một tập con R của tích Descartes $X \times Y$. Ta nói phần tử $x \in X$ có quan hệ R với phần tử $y \in Y$ nếu $(x, y) \in R$ và viết là xRy. Đặc biệt, nếu $R \subset X^2$ thì ta nói R là một quan hệ hai ngôi trên X.

1.1.2. Định nghĩa

Cho R là một quan hệ hai ngôi trên tập hợp X. Khi đó ta nói:

- R có tính phản xạ nếu $\forall x \in X, xRx$;
- R có tính đối xứng nếu $\forall x, y \in X, xRy \Rightarrow yRx$;
- R có tính phản đối xứng nếu $\forall x, y \in X, xRy$ và $yRx \Rightarrow x = y$;
- R có tính bắc cầu, nếu $\forall x, y, z \in X, xRy$ và $yRz \Rightarrow xRz$.

1.1.3. Thí dụ

1) Quan hệ "bằng nhau" $(=)$ trên một tập hợp X tùy ý có các tính chất: phản xạ, đối xứng, phản đối xứng và bắc cầu.

2) Quan hệ $\leq$ trên tập hợp **N** các số tự nhiên có các tính chất: phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu.

3) Quan hệ "bao hàm" $(\subset)$ trên tập hợp $\mathrm{P}(X)$ gồm tất cả các tập hợp con của X là một quan hệ hai ngôi có các tính chất: phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu.

4) Quan hệ đồng dạng trên tập hợp các tam giác có các tính chất: phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

5) Quan hệ "nguyên tố cùng nhau" trên tập hợp $\mathbf{N}^*$ các số nguyên dương chỉ có tính chất đối xứng.

1.2 QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

1.2.1. Định nghĩa

Quan hệ hai ngôi R trên tập hợp X được gọi là một quan hệ tương đương trên X nếu R thỏa mãn ba tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Chẳng hạn, quan hệ bằng nhau và quan hệ đồng dạng như trong Thí dụ 1.1.3 là những quan hệ tương đương.

1.2.2. Định nghĩa

Cho R là một quan hệ tương đương trên tập hợp X và $a \in X$. Tập hợp $\{x \in X \mid xRa\}$ được gọi là *lớp tương đương* của a (theo quan hệ R), kí hiệu là $\overline{a}$ hay $[a]$ hay $C(a)$.

Mỗi phần tử của một lớp tương đương gọi là một đại biểu của lớp tương đương đó.

1.2.3. Mệnh đề

Cho R là một quan hệ tương đương trên tập hợp X. Khi đó mọi lớp tương đương đều khác rỗng và hai lớp tương đương bất kì hoặc rời nhau hoặc trùng nhau.

1.2.4. Định nghĩa

Một phân hoạch của tập hợp X là một họ $(X_i)_{i\in I}$ gồm các tập con khác rỗng của X sao cho

$$X = \bigcup_{i\in I} X_i,\ X_i \cap X_j = \varnothing \left(\forall i, j \in I, i \neq j\right)$$

1.2.5. Mệnh đề

Mỗi quan hệ tương đương trên tập hợp X xác định một phân hoạch của X bởi các lớp tương đương.

Điều ngược lại cũng đúng. Cụ thể là mỗi phân hoạch $(X_i)_{i\in I}$ của tập hợp X xác định một quan hệ tương đương R trên X, sao cho mỗi X_i là một lớp tương đương. Quan hệ R được xác định bởi: xRy nếu có $i \in I$ sao cho $x, y \in X_i$.

1.2.6. Định nghĩa

Cho X là một tập hợp và R là một quan hệ tương đương trên X. Tập hợp các lớp tương đương phân biệt của X đối với quan hệ R được gọi là *tập hợp thương của X theo quan hệ tương đương R*, kí hiệu là X/R.

1.2.7. Thí dụ

1) Cho tập hợp $X = \{1,2,3,4\}$ và xét quan hệ hai ngôi R trên $\mathrm{P}(X)$ như sau:

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(X), A\,R\,B \Leftrightarrow |A| = |B|.$$

(Kí hiệu $|A|$ để chỉ số phần tử của A). Dễ dàng chứng minh được R là một quan hệ tương đương trên $\mathrm{P}(X)$. Các lớp tương đương theo quan hệ R là: $C_0 = \{\varnothing\}$ (tập hợp con của X không có phần tử nào), $C_1 = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$ (các tập con của X có một phần tử), $C_2 = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$ (các tập con của X có hai phần tử), $C_3 = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$ (các tập con của X có ba phần tử), $C_4 = \{\{1,2,3,4\}\}$ (tập con của X có bốn phần tử). Tập hợp thương của $\mathrm{P}(X)$ theo quan hệ R là $\mathrm{P}(X)/R = \{C_0, C_1, C_2, C_3, C_4\}$.

2) Cho n là một số nguyên lớn hơn 1 và xét quan hệ hai ngôi sau trên tập **Z** các số nguyên và gọi là quan hệ đồng dư môđulô n:

$$\forall x, y \in \mathbf{Z}, x \equiv y \pmod{n} \Leftrightarrow x - y \text{ là bội số của } n.$$

Dễ dàng chứng minh được $\equiv (\operatorname{mod} n)$ là một quan hệ tương đương trên **Z**. Với mỗi $x \in \mathbf{Z}$, tồn tại duy nhất hai số nguyên q và r sao cho $x = qn + r$ với $0 \le r < n$ và khi đó $x \equiv r (\operatorname{mod} n)$. Do đó các lớp tương đương theo quan hệ này là $\overline{0} = \{qn \mid q \in \mathbf{Z}\}$, $\overline{1} = \{qn + 1 \mid q \in \mathbf{Z}\}$, ..., $\overline{n-1} = \{qn + n - 1 \mid q \in \mathbf{Z}\}$. Tập hợp thương của **Z** theo quan hệ đồng dư môđulô n là $\{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ và thường kí hiệu là $\mathbf{Z}_n$, mỗi phần tử $\mathbf{Z}_n$ gọi là một số nguyên môđulô n.

1.3. QUAN HỆ THỨ TỰ

1.3.1. Định nghĩa

Quan hệ hai ngôi $\le$ trên tập hợp X được gọi là một *quan hệ thứ tự* nếu nó thỏa mãn các tính chất phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu. Khi đó ta nói X là *tập được sắp thứ tự* bởi $\leq$. Nếu $x \leq y$, ta nói x đứng trước y. Nếu $x \leq y$ và $x \neq$ y thì ta viết $x < y$. Tập con $Y \subset X$ được gọi là *được sắp thứ tự toàn phần* (hay được sắp thự tự tuyến tính) nếu với mọi $x, y \in Y$, ta có $x \leq y$ hoặc $y \leq x$. Trong trường hợp ngược lại ta nói Y được sắp thứ tự bộ phận.

1.3.2. Thí dụ

1) Quan hệ $\leq$ thông thường trên các tập hợp **N**, **Z**, **Q**, **R** là quan hệ thứ tự toàn phần.

2) Trên tập hợp **N** các số tự nhiên, xét quan hệ hai ngôi chia hết $("|")$ như sau:

$$\forall x, y \in \mathbf{N}, x \neq 0, x \mid y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{N}, y = kx.$$

Quan hệ này có hai tính chất: phản đối xứng và bắc cầu, nhưng không có tính chất phản xạ (ta không có $0 \mid 0$). Vì vậy, quan hệ chia hết không phải là một quan hệ thứ tự trên **N**. Tuy nhiên, quan hệ chia hết lại là một quan hệ thứ tự trên tập $\mathbf{N}^*$ các số tự nhiên khác không. Ở đây, quan hệ chia hết sắp thứ tự bộ phận tập $\mathbf{N}^*$.

3) Quan hệ bao hàm $("\subset")$ sắp thứ tự bộ phận tập $\mathrm{P}(X)$ gồm các tập con của X.

4) Cho X là tập hợp được sắp thứ tự toàn phần bởi quan hệ $\leq$. Trên X^n ta định nghĩa quan hệ hai ngôi D như sau:

$$\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in X^n,$$

$$x \,\mathrm{D}\, y \Leftrightarrow x = y \text{ hoặc } \exists i, x_1 = y_1, \ldots, x_{i-1} = y_{i-1}, x_i < y_i.$$

Khi đó, X^n được sắp thứ tự toàn phần bởi quan hệ D. Quan hệ này được gọi là quan hệ *thứ tự từ điển*.

1.3.3. Định nghĩa

Cho X là tập hợp được sắp thứ tự bởi quan hệ thứ tự $\leq$ và A là một tập con khác rỗng của X. Ta nói:

Phần tử $a \in A$ là *phần tử tối đại* của A nếu

$$\forall x \in A, a \leq x \Rightarrow x = a;$$

Phần tử $b \in A$ là *phần tử tối tiểu* của A nếu

$$\forall x \in A, x \le b \Rightarrow x = b;$$

Phần tử $m \in A$ là *phần tử lớn nhất của* A nếu

$$\forall x \in A, x \le m;$$

Phần tử $n \in A$ là *phần tử nhỏ nhất của* A nếu

$$\forall x \in A, n \le x;$$

Phần tử $c \in X$ là *phần tử chặn trên của* A nếu

$$\forall x \in A, x \le c;$$

Phần tử $d \in X$ là *phần tử chặn dưới của* A nếu

$$\forall x \in A, d \le x;$$

Phần tử nhỏ nhất của tập hợp tất cả các phần tử chặn trên của A (nếu có) gọi là *cận trên* của A, kí hiệu là $\sup A$;

Phần tử lớn nhất của tập hợp các phần tử chặn dưới của A (nếu có) gọi là *cận dưới* của A, kí hiệu là $\inf A$.

1.3.4. Chú ý

Phần tử lớn nhất hay nhỏ nhất (nếu có) của A là duy nhất.

Nếu A có phần tử lớn nhất thì đó cũng là phần tử tối đại duy nhất. Tương tự, nếu A có phần tử nhỏ nhất thì đó cũng là phần tử tối tiểu duy nhất.

Cận trên của A thuộc A khi và chỉ khi nó là phần tử lớn nhất của A. Tương tự, cận dưới của A thuộc A khi và chỉ khi nó là phần tử nhỏ nhất của A.

1.3.5. Định nghĩa

Cho tập hợp X được sắp thứ tự bởi quan hệ $\le$. Ta nói X được sắp thứ tự tốt bởi quan hệ này nếu mọi tập con khác rỗng của X đều có phần tử nhỏ nhất.

1.3.6. Thí dụ

1) Xét tập được sắp thứ tự $\mathbf{N}^*$ bởi quan hệ chia hết ("|") và $A = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Tập A không có phần tử lớn nhất, nhưng có phần tử nhỏ nhất và cũng là phần tử tối tiểu duy nhất là 1, các phần tử tối đại là $7, 8, 9, 10, 11, 12$. Cận trên của A trong $\mathbf{N}^*$ là $\text{BCNN}(1,2,4,6,7,8,9,10,11,12)$ và cận dưới của A trong $\mathbf{N}^*$ là 1.

2) Xét tập được sắp thứ tự $\mathrm{P}(X)$ bởi quan hệ bao hàm $("\subset")$, trong đó X là một tập khác rỗng. Phần tử lớn nhất và nhỏ nhất của $\mathrm{P}(X)$ lần lượt là X và $\varnothing$. Các phần tử tối tiểu của $\mathrm{P}(X)\setminus\{\varnothing\}$ là các tập $\{a\}$ với $a \in X$. Các phần tử tối đại của $\mathrm{P}(X)\setminus\{X\}$ là các tập $X\setminus\{a\}$ với $a \in X$. Cận trên và cận dưới của $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ trong $\mathrm{P}(X)$ lần lượt là $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ và $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$.

3) Tập hợp sắp thứ tự $(\mathbf{N}, \leq)$ là một tập sắp thứ tự tốt. Các tập hợp sắp thứ tự $(\mathbf{Z}, \leq)$, $(\mathbf{Q}, \leq)$ không phải là các tập sắp thứ tự tốt. Tập sắp thứ tự $(\mathbf{N}^*, |)$ không phải là tập sắp thứ tự tốt vì tập con $A = \{2, 3, 5\}$ không có phần tử nhỏ nhất.

BÀI TẬP VÀ LỜI GIẢI

1. Xác định xem quan hệ R trên tập $\mathbf{Z}$ các số nguyên có tính phản xạ, đối xứng, phản đối xứng, bắc cầu không? Với xRy nếu và chỉ nếu:

a) $x \neq y$;
b) $xy \geq 1$;
c) $x = y + 1$ hay $x = y - 1$;
d) x là bội số của y;
e) x và y cùng âm hoặc cùng không âm;
f) $x = y^2$;
g) $x \geq y^2$.

Giải

a) R chỉ có tính đối xứng.
b) R có tính đối xứng và bắc cầu.
c) R chỉ có tính đối xứng.

d) R có tính phản xạ và bắc cầu.

e) R có tính phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

f) R chỉ có tính phản đối xứng.

g) R có tính phản đối xứng và bắc cầu.

2. Cho tập hợp $X = \{0,1,2,3,4,5\} \subset \mathbf{N}$. Hãy liệt kê tất cả các phần tử của quan hệ R sau trên X và xét xem quan hệ R có các tính chất nào?

a) $\forall x, y \in X, xRy \Leftrightarrow x + y$ là số chẵn.

b) $\forall x, y \in X, x \neq 0, xRy \Leftrightarrow x \mid y$.

Giải

a)

$R = \{(0,0),(0,2),(0,4),(1,1),(1,3),(1,5),(2,0),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),$ $(3,5),(4,0),(4,2),(4,4),(5,1),(5,3),(5,5)\}$. Dễ dàng chứng minh được R có các tính chất: phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

b)

$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4),(5,5),(1,0),$ $(2,0),(3,0),(4,0),(5,0)\}$. Dễ dàng thấy R có các tính chất: phản đối xứng và bắc cầu.

3. Một quan hệ R trên tập X được gọi là quan hệ vòng quanh nếu xRy và yRz kéo theo zRx. Chứng minh rằng quan hệ R là phản xạ và vòng quanh nếu và chỉ nếu R là một quan hệ tương đương.

Giải

$(\Rightarrow)$ Ta đã có R là phản xạ. $\forall x, y \in X, xRy \Rightarrow xRy \wedge yRy \Rightarrow yRx$ (do tính vòng quanh), tức là R có tính đối xứng. $\forall x, y, z \in X, xRy \wedge yRz \Rightarrow zRx \Rightarrow xRz$, tức là R có tính bắc cầu. Vậy R là một quan hệ tương đương.

$(\Leftarrow)$ R là một quan hệ tương đương nên R có tính phản xạ. $\forall x, y, z \in X,\ xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz \Rightarrow zRx$, tức là R có tính vòng quanh.

4. Cho L_0 là một đường thẳng cho trước trong mặt phẳng $\mathbf{R}^2$. Một quan hệ R trên tập L tất cả các đường thẳng trong mặt phẳng $\mathbf{R}^2$ được xác định như sau:

$$\forall L_1, L_2 \in \mathcal{L},\ L_1 R L_2 \Leftrightarrow L_1 \cap L_0 \neq \varnothing \text{ và } L_2 \cap L_0 \neq \varnothing$$

Xác định xem R có là một quan hệ tương đương hay không?

Giải

R có tính đối xứng và bắc cầu, nhưng R không có tính phản xạ. Do đó R không là một quan hệ tương đương. Tuy nhiên, nếu L là tập các đường thẳng trong mặt phẳng $\mathbf{R}^2$ cắt L_0 thì R là một quan hệ tương đương trên L.

5. Cho M là một tập hợp khác rỗng, $a \in M$. Trên $X = \mathcal{P}(M)$, ta định nghĩa quan hệ hai ngôi như sau:

$$R = \left\{ (A, B) \in X^2 \mid A = B \text{ hay } a \in A \cap B \right\}$$

Chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương trên X. Hãy chỉ ra tập hợp thương.

Giải

Từ $A = A$, ta có $(A, A) \in R$ hay R có tính phản xạ.

$$\forall A, B \in X, (A, B) \in R \Rightarrow A = B \vee a \in A \cap B \Rightarrow B = A \vee a \in B \cap A \Rightarrow (B, A) \in R,$$

tức là R có tính đối xứng.

$$\begin{aligned}
&\forall A, B, C \in X, (A, B) \in R \wedge (B, C) \in R \\
&\Rightarrow (A = B \vee a \in A \cap B) \wedge (B = C \vee a \in B \cap C) \\
&\Rightarrow (A = B \wedge B = C) \vee (A = B \wedge a \in B \cap C) \vee (a \in A \cap B \wedge B = C) \\
&\qquad \vee (a \in A \cap B \wedge a \in B \cap C) \\
&\Rightarrow A = C \vee a \in A \cap C \Rightarrow (A, C) \in R,
\end{aligned}$$

tức là R có tính bắc cầu. Vậy R là một quan hệ tương đương.

Với mỗi $A \in X$, nếu $a \notin A$ thì $(A,B) \in R \Leftrightarrow A = B$ nghĩa là lớp tương đương $\overline{A} = \{A\}$ và nếu $a \in A$ thì $(A,B) \in R \Leftrightarrow a \in B$ nghĩa là lớp tương đương $\overline{A} = \{B \in X \mid a \in B\}$. Do vậy tập thương của X theo quan hệ R là

$$X / R = \{\{A\} \mid A \subset M, a \notin A\} \cup \{\{A \in X \mid a \in A\}\}$$

6. Gọi X là tập hợp các hàm thực biến số thực. Chứng tỏ quan hệ R sau là quan hệ tương đương trên X:

a) $\forall x, y \in X, xRy \Leftrightarrow \exists C > 0, x(t) = y(t), \forall t \in \mathbf{R}, |t| < C.$

b) $\forall x, y \in X, xRy \Leftrightarrow \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{x(t) - y(t)}{t^n} = 0$, trong đó $n \in \mathbf{N}$ cho trước.

Giải

a) $\forall x \in X, x(t) = x(t), \forall t \in R$, nghĩa là R có tính phản xạ, $\forall x, y \in X, xRy \Leftrightarrow \exists C > 0, x(t) = y(t), \forall t \in \mathbf{R}, |t| < C \Rightarrow \exists C > 0, y(t) = x(t), \forall t \in \mathbf{R}, |t| < C$ $\Rightarrow yRx$, nghĩa là R có tính đối xứng.

$\forall x, y, z \in X, xRy \wedge yRz \Rightarrow \exists C_1, C_2 > 0, x(t) = y(t), \forall t \in \mathbf{R}, |t| < C_1$ và $y(t) = z(t), \quad \forall t \in \mathbf{R}, |t| < C_2 \Rightarrow \exists C = \min(C_1, C_2), x(t) = z(t), \forall t \in \mathbf{R}$, $|t| < C$, nghĩa là R có tính bắc cầu. Vậy R là quan hệ tương đương.

b) $\forall x \in X, \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{x(t) - x(t)}{t^n} = 0$ hay xRx, nghĩa là R có tính phản xạ.

$\forall x, y \in X, xRy \Rightarrow \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{x(t) - y(t)}{t^n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{y(t) - x(t)}{t^n} = 0 \Rightarrow yRx$,

nghĩa là R có tính đối xứng.

$\forall x, y, z \in X, \; xRy \wedge yRz \Rightarrow \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{x(t) - y(t)}{t^n} = 0$ và $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{y(t) - z(t)}{t^n} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{x(t) - z(t)}{t^n} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{x(t) - y(t)}{t^n} + \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{y(t) - z(t)}{t^n} = 0 \Rightarrow xRz$, nghĩa là R có tính chất bắc cầu. Vậy R là quan hệ tương đương.

7. Xét quan hệ hai ngôi R trên $\mathbf{N}^2$ như sau:

$$\forall (m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \mathbf{N}^2, (m_1, n_1) R (m_2, n_2) \Rightarrow m_1 + n_2 = m_2 + n_1.$$

Chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương trên $\mathbf{N}^2$. Hãy chỉ ra tập hợp thương.

Giải

Rõ ràng R có tính phản xạ. $\forall(m_1,n_1),(m_2,n_2)\in\mathbf{N}^2$, $(m_1,n_1)R(m_2,n_2)$

$\Rightarrow m_1+n_2=m_2+n_1 \Rightarrow m_2+n_1=m_1+n_2 \Rightarrow (m_2,n_2)R(m_1,n_1)$ nghĩa là R có tính đối xứng.

$\forall(m_1,n_1),(m_2,n_2),(m_3,n_3)\in\mathbf{N}^2$, $(m_1,n_1)R(m_2,n_2)$ và $(m_2,n_2)R(m_3,n_3)$

$\Rightarrow m_1+n_2=m_2+n_1$ và $m_2+n_3=m_3+n_2 \Rightarrow m_1+n_2+m_2+n_3=m_2+n_1+m_3+n_2$

$\Rightarrow (m_1+n_3=m_3+n_1) \Rightarrow (m_1,n_1)R(m_3,n_3)$, nghĩa là R có tính bắc cầu. Vậy R là một quan hệ tương đương.

$\forall(m,n)\in\mathbf{N}^2$, lớp tương đương

$$\overline{(m,n)}=\{(m',n')\in\mathbf{N}^2 \mid m'-n'=m-n\}.$$

Tập hợp thương là $\mathbf{N}^2/R=\{\overline{(m,n)} \mid (m,n)\in\mathbf{N}^2\}$ và chính là tập $\mathbf{Z}$ các số nguyên.

8. Trên $\mathbf{Z}\times\mathbf{N}^*$, xét quan hệ hai ngôi sau:

$$\forall(z_1,n_1),(z_2,n_2)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{N}^*,(z_1,n_1)R(z_2,n_2)\Leftrightarrow z_1n_2=z_2n_1$$

Chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương trên $\mathbf{Z}\times\mathbf{N}^*$. Hãy chỉ ra tập hợp thương.

Giải

Rõ ràng R có tính phản xạ. $\forall(z_1,n_1),(z_2,n_2)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{N}^*$, $(z_1,n_1)R(z_2,n_2)$

$\Leftrightarrow z_1n_2=z_2n_1 \Leftrightarrow z_2n_1=z_1n_2 \Rightarrow (z_2,n_2)R(z_1,n_1)$, nghĩa là R có tính đối xứng.

$\forall(z_1,n_1),(z_2,n_2),(z_3,n_3)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{N}^*$, $(z_1,n_1)R(z_2,n_2)\wedge(z_2,n_2)R(z_3,n_3)$

$\Rightarrow z_1n_2=z_2n_1 \wedge z_2n_3=z_3n_2 \Rightarrow z_1n_2z_2n_3=z_2n_1z_3n_2 \Rightarrow z_1z_2n_3=z_2z_3n_1$; nếu $z_2\neq 0$ thì $z_1n_3=z_3n_1$, nếu $z_2=0$ thì $z_1n_2=0(\Rightarrow z_1=0)$ và $z_3n_2=0$ $(\Rightarrow z_3=0)$

nên $z_1n_3 = z_3n_1 = 0$ hay $(z_1, n_1)R(z_3, n_3)$, nghĩa là R có tính bắc cầu. Vậy R là một quan hệ tương đương.

$\forall (z,n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$, lớp tương đương

$$\overline{(z,n)} = \left\{ (z', n') \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^* \middle| \frac{z'}{n'} = \frac{z}{n} \right\}$$

Tập hợp thương là $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}^* / R = \left\{ \overline{(z,n)} \middle| (z,n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^* \right\}$ và chính là tập **Q** các số hữu tỉ.

9. Trong mặt phẳng có hệ tọa độ vuông góc, hai điểm $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ được gọi là quan hệ với nhau bởi R nếu và chỉ nếu $x_1y_1 = x_2y_2$. Chứng tỏ rằng R là một quan hệ tương đương và tìm các lớp tương đương. Bây giờ nếu định nghĩa

$$P_1SP_2 \Leftrightarrow x_1y_1 = x_2y_2 \text{ và } x_1x_2 \geq 0$$

thì S còn là một quan hệ tương đương nữa không?

Giải

Dễ dàng chứng minh được R có tính phản xạ, đối xứng và bắc cầu, nghĩa là R là một quan hệ tương đương. Với điểm $P(a,b)$ trong mặt phẳng, lớp tương đương $\overline{P(a,b)} = \{P'(x,y) \mid xy = c\}$ (với $c = ab$). Nếu $c = 0$ thì $\overline{P(a,b)}$ chính là hai trục tọa độ $x = 0$ và $y = 0$. Nếu $c \neq 0$ thì $\overline{P(a,b)}$ chính là hyperbol có phương trình $xy = c$. Tập hợp thương là tập

$$\left\{ \{P(x,y) \mid xy = c\} \middle| c \in \mathbf{R} \right\}$$

S không là một quan hệ tương đương vì nó không có tính bắc cầu $\big((1,0)S(0,1), (0,1)S(-1,0)$ nhưng không có $(1,0)S(-1,0)\big)$.

10. Trên tập hợp **R** các số thực, xét quan hệ hai ngôi R sau:

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, xRy \Leftrightarrow x^3 - y^3 = x - y.$$

Chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương. Tìm các lớp tương đương và tìm tập hợp thương.

Giải

$\forall x, y, z \in \mathbf{R}, x^3 - x^3 = x - x = 0$, tức là xRx hay R có tính phản xạ; $x^3 - y^3 = x - y \Rightarrow y^3 - x^3 = y - x$ tức là $xRy \Rightarrow yRx$ hay R có tính đối xứng; $x^3 - y^3 = x - y$ và $y^3 - z^3 = y - z \Rightarrow x^3 - z^3 = \left(x^3 - y^3\right) + \left(y^3 - z^3\right) = \left(x - y\right) + \left(y - z\right) = x - z$, tức là xRy và $yRz \Rightarrow xRz$ hay R có tính bắc cầu. Vậy R là một quan hệ tương đương.

$$\forall a \in \mathbf{R}, \overline{a} = \left\{x \in \mathbf{R} \mid x^3 - a^3 = x - a\right\}$$
$$= \left\{x \in \mathbf{R} \mid \left(x - a\right)\left(x^2 + ax + a^2 - 1\right) = 0\right\}.$$

Nếu $a < -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ hay $a > \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ thì $\overline{a} = \left\{a\right\}$;

Nếu $a = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ hay $a = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ thì $\overline{a} = \left\{-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$;

Nếu $a = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ hay $a = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ thì $\overline{a} = \left\{\dfrac{2}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$;

Nếu $-\dfrac{2}{\sqrt{3}} < a < \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ và $a \neq \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ thì

$$\overline{a} = \left\{a, \frac{-a - \sqrt{4 - 3a^2}}{2}, \frac{-a + \sqrt{4 - 3a^2}}{2}\right\}.$$

11. Cho f là một đơn ánh từ tập X vào tập $\mathbf{N}$ các số tự nhiên. Chứng minh rằng quan hệ R được xác định bởi:

$$\forall x, y \in X, xRy \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$$

là một quan hệ thứ tự toàn phần trên X.

Giải

$\forall x, y, z \in X$, $f(x) \leq f(x)$ hay R có tính phản xạ, nếu $f(x) \leq f(y)$ và $f(y) \leq f(z)$ thì $f(x) \leq f(z)$ hay R có tính bắc cầu. Ngoài ra, nếu $f(x) \leq f(y)$ và $f(y) \leq f(x)$ thì $f(x) = f(y)$ và do f là đơn ánh nên $x = y$ hay R có tính phản đối xứng. $\forall x, y \in X$, ta luôn có $f(x) \leq f(y)$

hoặc $f(y) \le f(x)$ hay xRy hoặc yRx. Vì vậy, R là một quan hệ thứ tự toàn phần trên X.

12. Cho tập hợp $X = \{2,4,6,7,8,10,11,12\}$. Hãy xác định phần tử tối đại, tối tiểu, lớn nhất và nhỏ nhất của tập hợp X với quan hệ thứ tự chia hết "$|$" và tập hợp $\mathcal{P}(X) \setminus \varnothing$ với quan hệ thứ tự bao hàm "$\subset$".

Giải

Đối với quan hệ thứ tự chia hết "$|$" trên X, các phần tử tối đại là $7, 8, 10, 11, 12$, các phần tử tối tiểu là $2, 7, 11$, không có phần tử lớn nhất cũng như nhỏ nhất.

Đối với quan hệ thứ tự bao hàm "$\subset$" trên $\mathcal{P}(X) \setminus \varnothing$, phần tử tối đại duy nhất cũng như phần tử lớn nhất là X, các phần tử tối tiểu là các tập con có một phần tử của X, không có phần tử nhỏ nhất.

13. Xét quan hệ chia hết trên tập hợp $\mathbf{N}^*$ và các tập con $A = \{4,8,12\}$, $B = \{2,3,4,5\}$.

a) Tìm các phần tử lớn nhất, nhỏ nhất của A và B.

b) Tìm các phần tử tối đại, tối tiểu của A và B.

c) Tìm các phần tử cận trên đúng, cận dưới đúng của A và B.

Giải

a) A không có phần tử lớn nhất và có phần tử nhỏ nhất là 4.

B không có phần tử lớn nhất hoặc nhỏ nhất.

b) A có phần tử tối đại là $8, 12$ và tối tiểu duy nhất là 4. B có các phần tử tối đại là $3, 4, 5$ và có các phần tử tối tiểu là $2, 3, 5$.

c) A và B lần lượt có cận trên là $\text{BCNN}(4,8,12) = 24$ và $\text{BCNN}(2,3,4,5) = 60$, A và B lần lượt có cận dưới là $\text{UCLN}(4,8,12) = 4$ và $\text{UCLN}(2,3,4,5) = 1$.

14. Tập A được gọi là sắp thứ tự đầy đủ bởi quan hệ thứ tự $\le$ nếu mọi tập con khác rỗng của A bị chặn trên đều có cận trên.

a) Chứng minh rằng tập sắp thứ tự tốt là tập sắp thứ tự đầy đủ.

b) Chứng tỏ rằng **N** và **R** sắp thứ tự đầy đủ bởi quan hệ $\leq$ thông thường nhưng **Q** sắp thứ tự không đầy đủ bởi $\leq$.

Giải

a) Giả sử A được sắp thứ tự tốt bởi $\leq$ và B là một tập con tùy ý khác rỗng của A bị chặn trên. Khi đó tập C gồm các chặn trên của B là tập con khác rỗng của A. Vì vậy, C có phần tử nhỏ nhất c và c chính là cận trên đúng của B. Do đó A được sắp thứ tự đầy đủ bởi $\leq$.

b) **N** là tập được sắp thứ tự tốt bởi quan hệ $\leq$ thông thường, nên theo Câu a) **N** được sắp thứ tự đầy đủ bởi quan hệ này.

Theo nguyên lí về cận của tập các số thực **R**, mọi tập con khác rỗng của **R** bị chặn trên thì có cận trên đúng. Do đó **R** được sắp thứ tự đầy đủ bởi quan hệ $\leq$.

Xét tập $B = \left\{ q \in \mathbf{Q} \middle| 0 < q < \sqrt{2} \right\}$ thì $B \neq \varnothing$ và có chặn trên trong **Q**. Nếu B có cận trên đúng là c thì sẽ dẫn đến vô lí vì giữa c và $\sqrt{2}$ có vô số hữu tỉ (tính chất trù mật của **Q** trong **R**).

15. Cho X là một tập khác rỗng và M là tập các ánh xạ từ X vào tập $\{0,1\}$. Trên M, xét quan hệ R như sau:

$$\forall f, g \in M, fRg \Leftrightarrow \forall x \in X, f(x)g(x) = f(x).$$

Chứng minh rằng R là một quan hệ thứ tự. M có được sắp thứ tự toàn phần bởi R hay không? Hãy xác định các phần tử tối đại và tối tiểu của M.

Giải

$$\forall f, g, h \in M, \forall x \in X,$$

$f(x)f(x) = f(x)$ hay fRf. Do đó R có tính phản xạ;

Nếu fRg và gRf tức là $f(x)g(x) = f(x)$ và $g(x)f(x) = g(x)$ thì $f(x) = g(x)$ hay $f = g$, do đó R có tính phản đối xứng;

Nếu fRg và gRh tức là $f(x)g(x) = f(x)$ và $g(x)h(x) = g(x)$ thì $f(x)g(x)h(x) = f(x)$; khi đó, nếu $g(x) = 0$ thì $f(x)h(x) = f(x) = 0$ và