VỀ MỘT LỚP BÀI TOÁN KIỂU KIRCHHOFF TRONG KHÔNG GIAN ORLICZ – SOBOEV

Nguyễn Thành Chung

Tóm tắt. *Trong bài viết này, chúng tôi trình bày một số kết quả nghiên cứu về các bài toán kiểu Kirchhoff trong không gian Orlicz-Sobolev. Sử dụng phương pháp biến phân chúng tôi chứng minh sự tồn tại nghiệm trong trường hợp biểu thức phi tuyến không thỏa mãn điều kiện kiểu Ambrosetti-Rabinowitz. Những bài toán này là mô hình của các hệ vật lý và sinh học mà ở đó nghiệm được mô tả như là một quá trình phụ thuộc vào mức độ thay đổi trung bình của nó. Đây là một hướng nghiên cứu mới được nhiều nhà toán học trên thế giới quan tâm trong những năm trở lại đây. Kết quả này đã được công bố trong công trình [6].*

Từ khóa: Bài toán kiểu Kirchhoff, Không gian Orlicz-Sobolev, Phương pháp biến phân

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Giả sử Ω là một miền bị chặn trong $R^n\ (n \geq 3)$ với biên $\partial\Omega$ trơn. Giả sử $a:(0,+\infty) \to R$ là một hàm số sao cho ánh xạ xác định bởi

$$\varphi(t) = \begin{cases} a(|t|)t, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

là một đồng phôi tăng từ R lên R. Kí hiệu

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds,\ t \in R.$$

Trong bài viết này, chúng tôi quan tâm đến sự tồn tại nghiệm yếu của lớp bài toán sau:

$$\begin{cases} -M(\rho(u))\big(\mathrm{div}(a(|\nabla u|)\nabla u) - a(|u|)u\big) = K(x)f(u),\ x \in \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0,\ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

trong đó n là vectơ pháp tuyến đơn vị đối với biên $\partial\Omega$, $\rho(u) = \int_\Omega \big(\Phi(|\nabla u|) + \Phi(|u|)\big)dx$, $K \in L^\infty(\Omega)$, $M:[0,+\infty) \to R$ và $f: R \to R$ là các hàm số liên tục.

Để ý rằng bài toán (1.1) là sự mở rộng đối với bài toán kiểu Kirchhoff trong không gian Sobolev thông thường (xem [1]):

$$\begin{cases} -M\left(\int_\Omega \big(|\nabla u|^p + |u|^p\big)dx\right)\big(\Delta u - |u|^{p-2}u\big) = K(x)f(u),\ x \in \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0,\ x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

Bài toán (1.2) đã được nghiên cứu trong các công trình [4,7,8]. Sự mở rộng từ mô hình (1.2) sang mô hình bài toán (1.1) xuất phát từ các nghiên cứu về bài toán elliptic trong không gian Orlicz-Sobolev [3,5]. Những kết quả này có được nhờ việc phát triển lý thuyết biến phân trong không gian Sobolev cổ điển mà cụ thể là các nguyên lý cực tiểu và nguyên lý minimax. Để áp dụng được các nguyên lý này, nhiều nhà toán học đã đưa ra các điều kiện khác nhau về dáng điệu của hàm f. Một trong những điều kiện quan trọng được đặt ra bởi Ambrosetti và Rabinowitz vào năm 1973, gọi tắt là điều kiện kiểu (A-R). Điều kiện này cho phép áp dụng một nguyên lý biến phân nổi tiếng có tên gọi là "định lý qua núi". Tuy nhiên, điều kiện này khá chặt và vì vậy nhiều năm trở lại đây, đã có nhiều nhà toán học nghiên cứu tìm kiếm điều kiện thay thế. Kết quả mà chúng tôi giới thiệu ở đây là một trong những nghiên cứu theo hướng đó nhưng được phát triển cho không gian Orlicz-Sobolev.

2. KẾT QUẢ CHÍNH VÀ MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN

Ta nói $u \in W^1L_\Phi(\Omega)$ là một nghiệm yếu của bài toán (1.1) nếu nó thỏa mãn

$$M\big(\rho(u)\big)\int_\Omega \big(a(|\nabla u|)\nabla u \nabla v + a(|u|)uv\big)dx - \int_\Omega K(x)f(u)v dx = 0$$

với mọi $v \in W^1L_\Phi(\Omega)$. Ở đây không gian $W^1L_\Phi(\Omega)$ gọi là không gian Orlicz-Sobolev và được xây dựng như trong các công trình [3,5,6]. Kết quả thu được đối với bài toán (1.1) được phát biểu trong định lý sau. Đọc giả có thể xem chứng minh định lý này trong công trình [6].

Định lý. Giả sử rằng các hàm M, f thỏa mãn những điều kiện sau:

(M_1) $M:[0,+\infty) \to R$ liên tục và tồn tại $m_0 > 0$ sao cho $M(t) \ge m_0$ với mọi $t \in [0,+\infty)$.

(M_2) $M(t) \ge M(t)t$ với mọi $t \in [0,+\infty)$, trong đó $M(t) = \int_0^t M(s)ds$.

(K_1) $K \in L^\infty(\Omega)$ và $K(x) \ge k_0 > 0$ với mọi $x \in \Omega$.

(F_1) $f \in C(R,R)$ và tồn tại hằng số $s_0 \ge 0$, một hàm giảm $\theta(s) \in C(R \setminus (-s_0, s_0), R)$ sao cho

$$0 < (\varphi^0 + \theta(s))F(s) \le f(s)s, \text{ với mọi } |s| \ge s_0,$$

trong đó $\theta(s) > 0$ và $\lim_{|s|\to+\infty} \theta(s)|s| = +\infty$, $\lim_{|s|\to+\infty} \int_{s_0}^{|s|} \frac{\theta(t)}{t} dt = +\infty$, $F(s) = \int_0^s f(t)dt$, $\varphi^0 = \sup_{t>0} \frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)}$.

(F_2) $\lim_{s\to 0} \frac{f(s)}{|s|^{\varphi^0 - 1}} = 0.$

Khi đó bài toán có ít nhất một nghiệm yếu không tầm thường. Nếu thêm điều kiện f lẻ thì bài toán (1.1) sẽ có vô hạn cặp nghiệm yếu đối xứng không tầm thường.

Điều kiện (F_1) là sự mở rộng của điều kiện kiểu (A-R) (xem [2]). Điều kiện này hoàn toàn khác so với điều kiện về dáng điệu của vế phải trong công trình [5]. Hơn nữa, do sự xuất hiện của hàm M nên kết quả nêu trên là thực sự mới và đáng quan tâm. Đây là một trong những kết quả khởi đầu về lớp bài toán kiểu Kirchhoff trong không gian Orlicz-Sobolev. Hiện chúng tôi đang phát triển các kết quả thu được cho trường hợp số mũ tới hạn, đặc biệt là dạng không trơn của bài toán (1.1). Một hướng nghiên cứu thú vị nữa cho lớp bài toán này là sử dụng phương pháp phân tích đa tạp và tô pô để nghiên cứu sự tồn tại và tính đa nghiệm (xem [4]).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] R.A. Adams (1975), *Sobolev spaces*, Academic Press, New York.

[2] A. Ambrosetti, P. Rabinowitz (1973), *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal., 14, 349-381.

[3] G. Bonanno, G. M. Bisci, V. Radulescu (2011), *Existence of three solutions for a non-homogeneous Neumann problem through Orlicz-Sobolev spaces*, Nonlinear Anal., 74, 4785-4795.

[4] C.Y. Chen, Y.C. Kuo, T.F. Wu (2011), *The Nehari manifold for a Kirchhoff type problem involving sign-changing weight functions*, J. Differential Equations, 250, 1876-1908.

[5] N.T. Chung, H.Q. Toan (2013), *On a nonlinear and non-homogeneous problem without (A-R) type condition in Orlicz-Sobolev spaces*, Appl. Math. Comput., 219, 7820-7829.

[6] N.T. Chung (2015), *Existence of solutions for a class of Kirchhoff type problems in Orlicz-Sobolev spaces*, Annales Polonici Mathematici, to appear.

[7] G. Kirchhoff (1883), Mechanik, Teubner, Leipzig.

[8] T.F. Ma (2005), *Remarks on an elliptic equations of Kirchhoff type*, Nonlinear Anal., 63, 1967-1977.